



潜熱処理の違いが飽和地盤凍結過程の数値解析に与える影響

菊地 駿¹・斎藤広隆¹・大石雅人²

Effect of different latent heat treatments on numerical analysis of ground freezing processes

Shun KIKUCHI¹, Hiroataka SAITO¹ and Masato OISHI²

Abstract: In artificial ground freezing methods, frozen soil is artificially created to ensure the strength and impermeability of the soil. It is crucial to predict the freezing process of soil by considering the latent heat release during the freezing process. In this study, a computational method for handling latent heat in the freezing processes of saturated ground is investigated by comparing analytical results. The finite element method with stabilization technique was used to formulate the heat conduction equation, and the latent heat was evaluated using the temperature recovery method, the Generalized Clausius-Clapeyron (GCC) equation, and the exponential function model. The results showed that while any of the latent heat treatment methods can be used to analyze the latent heat under conditions where freezing does not take a long time, the use of either the GCC or exponential function model methods is more reliable than the temperature recovery method under conditions where freezing takes a long time.

Key Words: Soil freezing, latent heat, numerical analysis, finite element method

1. はじめに

地盤凍結工法はトンネル掘削等の土木工事の際に、土壌を人工的に凍結させることで地盤の安定化や地下水の遮断を目的として行われる。凍結によって形成される氷は、土壌の微細な隙間を埋めることで土壌の強度向上に寄与し、同時に土壌の透水性を低下させる。その結果、土壌中の液状水の動きが制限されることにより遮水層が形成され、地盤の安定性が向上すると同時に、地盤構造物の耐久性が増す(伊藤・吉田, 2016)。そのため、施工現場周辺の土壌を凍結させることで一時的に強固な凍土とし、他の構造物の保護やシールドマシンなどの掘削機械による掘削開始時の防護が可能となる。また、凍土壁

による地下水の遮断を行うことで地下水の流入による土壌の流動化を防ぐことができ、作業員の安全確保にもつながる。このような地盤凍結技術において、凍結・融解時の温度分布や水の量を正確に予測することは、凍結工法の安全性や経済性を高め、環境負荷の低減に寄与する。ただし、凍土を形成するためには、水の凍結潜熱によって大きな熱量の移動が必要となる(凍土分科会, 2014)。そのため、地下水流れによって常に熱の供給が行われる場合、地下水流れがない場合と比べ凍土の造成が抑制される。現在、地盤凍結の現場では高志(1969)の判定式より凍結管の配置と地盤の熱物性値、初期・凍結温度によって定まる限界流速を算出し、地下水流速が限界流速以下となる条件下で地盤凍結工法が施工されている。初期状態では凍結工法を適用できないほど地下水流速が大きく、限界流速が小さい場合でも、凍結管を増設することで限界流速を大きくしたり、化学薬剤注入等によって地下水流速を小さくすることで地盤凍結工法を施工している(生頼, 1997)。この高志の式による判別は簡易的に凍結工法が適用できるかどうかの判断には有用である一方で、この判定式のみでは地下水流れがある場合の正確な凍結日数や土壌中の地下水流れの状態を予測することができない。

土壌の凍結・融解過程において温度分布を予測することは、凍土の生成・消失過程を理解し、凍土の強度や遮水性を評価する上で重要である。凍結・融解過程における温度分布の予測は、一般に非定常熱伝導方程式を解くことで行われている。地下水流れがない仮定の下で、均一土層における凍結現象を移動境界問題として解いた凍結過程の解析解(Alfreds, 1966)が存在する。この解析解は、フィールド実験では実測温度変化とほぼ一致することが確認されている(高志ら, 1961)。ただし、この解析解は地下水流れの影響を考慮していないため、地下水流れに伴う移流による熱輸送が無視できないときは、正確な温度変化の予測ができない。地下水流れが存在する多くの条件下では、解析解の導出ができず数値計算による解析が必要となる。数値計算を用いることで、地下水流れが存在する場合に加え、成層構造が発達した地盤や、不均質な地盤においても、適切な物性値を用いることで温度分布や凍結に要する日数の予測が可能となる。これ

¹Graduate School of Agriculture, Tokyo University of Agriculture and Technology, 3-8-1, Harumi, Fuchu, Tokyo, 183-8538, Japan. Corresponding author. 斎藤広隆, 東京農工大学大学院

²Ground Freezing Division, Seiken Co., LTD., 1-15-17, Koishikawa, Bunkyo, Tokyo, 112-0002, Japan

2024年7月31日受稿 2024年10月30日受理

までに数値計算によって土壌凍結過程の解析を行った研究は多く存在する(松岡ら, 2015). その中でも, 土壌凍結の数値解析に重要な要素である水の凍結潜熱の取り扱い方法は大きく分けて2つに分類される. ひとつは, 熱移動支配方程式とは別に凍結潜熱の放出を計算する方法であり, 金属の液・固相間の潜熱放出に適用した手法(新山, 1993)を多孔質体中の水の凍結に対して適用するものがあげられる. もうひとつは支配方程式内に潜熱放出項を組み込むことである. 不飽和土の水分保持と不凍水と圧力の関係が等しいという仮定に基づいて, 不凍水量から含水率, つまり凍結率を求める手法(渡辺ら, 2007)によって, 熱物性値や潜熱放出に用いて相変化を取り扱う場合と, 土壌間隙中の氷の割合である凍結率を工学的な手法(Li et al., 2019)によって直接的に求め, その結果を熱物性値や潜熱放出に用いて相変化を取り扱う場合がある. 凍結・融解過程を含む数値計算をする上で重要な潜熱の取り扱いにはいくつかの方法があるが, それらを比較した事例は少ない.

本研究では飽和地盤凍結過程の数値解析において, 潜熱の取り扱いの違いが温度予測に与える影響を明らかにすることを目的とする. 具体的には, 異なる潜熱の取り扱い手法を用いた数値解析による飽和地盤凍結時の温度変化予測を比較することで, それぞれの手法の特徴を明らかにした. ただし本研究では, 温度予測に影響を与える他の要因を排除するために地下水流れのない場を想定し, 地盤内の熱伝導と間隙水の凍結に焦点を当てた. 数値解析による温度変化については, Alfreds (1966)による解析解と比較することで, 各手法による温度変化予測の特徴を明らかにした. また, 凍結開始温度を下回った際に発生する間隙水のサクシオンによる水分移動については, 本研究では考慮していない.

2. 凍結過程の熱移動の数値計算手法

2.1 熱移動の支配方程式

飽和土壌における水分流れを考慮しない凍結過程の2次元熱移動は, 次式に示す水の凍結潜熱を考慮した2次元熱伝導方程式で表される(Hansson et al., 2004). ただし, 本研究では凍結による体積膨張は無視し, 凍結過程で間隙率は変化しないとした.

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} - L_f \rho_{ice} \frac{\partial \theta_{ice}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (1)$$

ここで C_p は土壌の体積熱容量 [$J m^{-3} K^{-1}$], λ は土壌の熱伝導率 [$W m^{-1} K^{-1}$], L_f は水の凍結潜熱 [$J kg^{-1}$], ρ_{ice} は氷の密度 [$kg m^{-3}$], θ_{ice} は体積含水率 [$m^3 m^{-3}$], T は温度 [$^{\circ}C$], t は時間 [s], x_i, x_j は2次元直交座標の軸 ($i, j = 1, 2$) であり, λ の異方性は考慮しない. 左辺第一項は時間経過による内部エネルギーの変化, 左辺第二項は水の相変化によるエネルギー変化, 右辺は熱伝導に

よる熱移動を表す. ここで土壌の体積熱容量は, 土壌を構成する土粒子, 液状水, 氷の体積熱容量にそれぞれの体積分率を掛けた値の和で表される (Jury and Horton, 2006).

$$C_p := \theta_s C_s + \theta_w C_w + \theta_{ice} C_{ice} \quad (2)$$

ここで θ_s, θ_w はそれぞれ土粒子, 液状水の体積分率 [$m^3 m^{-3}$], C_s, C_w, C_{ice} はそれぞれ土粒子, 液状水, 氷の体積熱容量 [$J m^{-3} K^{-1}$] である. (1) 式の左辺は連鎖率より次のように変形できる.

$$\begin{aligned} C_p \frac{\partial T}{\partial t} - L_f \rho_{ice} \frac{\partial \theta_{ice}}{\partial t} &= C_p \frac{\partial T}{\partial t} - L_f \rho_{ice} \frac{\partial \theta_{ice}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \left(C_p - L_f \rho_{ice} \frac{\partial \theta_{ice}}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = C_a \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで C_a は土壌の見かけの体積熱容量 [$J m^{-3} K^{-1}$] である. よって, (1) 式は次のように表される.

$$C_a \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (4)$$

また, 土壌の熱伝導率 $\lambda [W m^{-1} K^{-1}]$ は構成物質の体積分率を使った(5)式の加重幾何平均で与えた. 体積分率に基づいて平均を取るモデルが使われることもあるが, 間隙水が凍ることでより非線形性が強くなるため, 本論文では単純でありながら, 古くから使われている加重幾何平均モデルを用いた (Nicolosky et al., 2009; Sass et al., 1971).

$$\lambda := \lambda_s^{\theta_s} \cdot \lambda_w^{\theta_w} \cdot \lambda_{ice}^{\theta_{ice}} \quad (5)$$

ただし, $\lambda_s, \lambda_w, \lambda_{ice}$ はそれぞれ土壌, 水, 氷の熱伝導率 [$W m^{-1} K^{-1}$] である. 間隙に占める氷の割合を, それぞれの体積分率より凍結率 $Fr [-]$ を定義した.

$$Fr := \frac{\theta_{ice}}{\phi} \quad 0 \leq Fr \leq 1 \quad (6)$$

ここで, ϕ は土壌の間隙率 [$m^3 m^{-3}$] である. 数値計算の対象である偏微分方程式の(4)式は初期値・境界値条件問題である. 本研究では(4)式を解くために次のような初期条件, 境界条件を与えた. 初期条件としては, 任意の座標 x_i に温度 T_0 を与えた.

$$T(x_i, 0) = T_0(x_i) \quad (7)$$

境界条件としては, 対象とする計算領域の境界 Γ 上の任意の地点において温度 T_D または温度勾配 N を与えた((8), (9)式). 前者を Dirichlet 境界条件, 後者を

Neumann 境界条件と呼ぶ。なお、温度勾配がゼロである場合は断熱を意味し、これは境界を介して外部への熱移動が生じないことを示す。この条件は特に断熱境界条件と呼ばれる。

$$T(x_i, t) = T_D(x_i) \quad \text{for } x_i \in \Gamma_D \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(x_i, t) = N(x_i) \quad \text{for } x_i \in \Gamma_N \quad (9)$$

ただし、境界 Γ は、Dirichlet 境界条件を与える境界 Γ_D 、または Neumann 境界条件を与える境界 Γ_N に属しており、この2つは重ならないように設定されている。また、これら2つの境界を合わせると、境界全体である Γ となる。また、(1) 式は $T(x_i, t)$ に加えて θ_{ice} も未知数であるため、 θ_{ice} を求める必要があるが、 θ_{ice} は2.2節で示す潜熱の取り扱い方法によって求め方が異なる。

2.2 潜熱の取り扱い手法

土壌の凍結過程の数値解析においては、土壌中の水の凍結に伴う潜熱の適切な取り扱いが必要である。本研究では凍結過程に対し、潜熱の取り扱い手法として次の3つの手法を用いた。

2.2.1 温度回復法を用いた潜熱の取り扱い

土壌の凍結過程の数値解析における潜熱の取り扱い方法の1つに温度回復法 (Temperature Recovery Method, TRM) がある (西垣ら, 1993)。TRM では凍結が始まったとしても相変化に関与する (1) 式の左辺第2項を無視して温度解析を行い、その後凍結開始温度 T_f [°C] からの温度低下によって変化する熱量が、潜熱として放出された熱量と同一とみなして T_f まで温度を回復させる方法である。TRM を用いた解析では、ある時間にある地点において T が T_f であるときのみ凍結率が変化する。

TRM では各時間ステップ t^k で温度が T_f 以下になると、Fig. 1 のように T_f に戻す処理を行う。Fig. 1(a) の点線は各時間ステップでの温度の解析結果、実線は温度の解析結果に TRM による潜熱処理を適用した結果の温度を示している。ある時間ステップで潜熱を無視した計算をした結果、任意の地点の T が T_f 以下となったときの T_f からの温度低下量を ΔT [°C] とすると、 ΔT に見合う土壌の単位体積あたりの熱量変化量 ΔQ は次のように表される。

$$\Delta Q = C_p \Delta T \quad (10)$$

また、 Fr が ΔFr だけ増加したとき、 ΔFr に見合う単位体積あたりの潜熱放出量 ΔQ_f は次のように表される。

$$\Delta Q_f = \rho_w \theta_w L_f \Delta Fr \quad (11)$$

(10) 式の ΔQ と (11) 式の ΔQ_f が等しいとすると、次式が成り立つ。

$$\rho_w \theta_w L_f \Delta Fr = C_p \Delta T$$

よって ΔFr は ΔT から次のように表される。

$$\Delta Fr = \frac{C_p}{\rho_w \theta_w L_f} \Delta T \quad (12)$$

TRM では各時間ステップで T を潜熱を考慮しない計算によって求め、その後 (12) 式を用い Fr を更新する。 Fr が 1 となると液状水は存在せず θ_{ice} は一定となるため、(1) 式第2項は常に 0 となり、以降潜熱の取り扱いは不要となる。

2.2.2 Generalized Clausius-Clapeyron 式を用いた潜熱の取り扱い

飽和土壌の液状水凍結過程と液状水の脱水過程が同一と仮定することによって、不凍水の圧力を水分特性曲線によって推定できる (Williams, 1964)。水と氷が共存する系において、間隙水圧が変化しても氷の圧力が変化しない場合、次の Generalized Clausius-Clapeyron (GCC) 式が成立する (Edlefsen and Anderson, 1943; Williams and Smith, 1989)

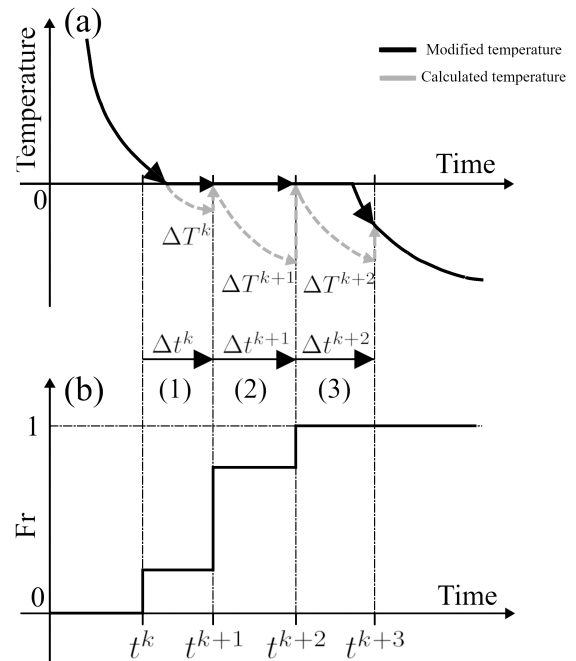


Fig. 1 温度回復法の概念図：(a) 温度の変化を示し、実線は温度回復法適用後の温度、点線は計算例を表す。(b) 凍結率の変化を示す。 t は計算時間、 Δt は計算時間ステップ、 ΔT は 0°C からの温度低下量を示し、上付き文字 k は k 回目の計算における各値を表す。

Schematic of TRM: (a) The temperature variation, with the solid line representing the temperature after applying TRM and the dashed line showing a calculation example. (b) The freezing rate variation. t represents the calculation time, Δt denotes the time step, ΔT indicates the temperature drop from 0°C , and the superscript k corresponds to the value at the k -th calculation.

$$v_w \frac{dP_w}{dT^*} = \frac{L_f}{T^*} \quad (13)$$

ここで P_w は水の圧力 [Pa], v_w は水の比体積 [$\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$], T^* は絶対温度 [K] である. ここで (13) 式の水の圧力を $P_w = \rho_w g h$ と置き, 境界条件として $T^* = T_f^*|_{h=0}$ を与えれば (14) 式を得る.

$$h = \frac{L_f}{g} \ln \frac{T^*}{T_f^*} \quad (14)$$

ここで h は圧力水頭 [m], g は重力加速度 [m s^{-2}], T_f^* は凍結開始温度 [K] である. 水分特性曲線に (14) 式を適用すると, 不凍水量 θ_w を絶対温度 T^* から求めることができる. 本研究では, van Genuchten (1980) のモデル (vG モデル) を水分特性曲線として用いて, θ_w を求めた.

$$\theta_w(h) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)(1 + |\alpha h|^n)^{-m} \quad (15)$$

ここで, θ_r , θ_s はそれぞれ残留, 飽和体積含水率 [$\text{m}^3 \text{m}^{-3}$], α [m^{-1}], n [-], m [-] はそれぞれ vG モデルのパラメーターである. (15) 式に (14) 式を代入すると次のようになる.

$$\theta_w(T^*) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left(1 + \left| \alpha \frac{L_f}{g} \ln \frac{T^*}{T_f^*} \right|^n \right)^{-m} \quad (16)$$

飽和条件下では θ_{ice} は θ_s より $\theta_w(T^*)$ を引くことで求められるため, θ_{ice} は以下に示すように T^* の関数で表される.

$$\begin{aligned} \theta_{\text{ice}}(T^*) &= \theta_s - \theta_w(T^*) \\ &= \theta_s - \theta_r - (\theta_s - \theta_r) \left[1 + \left| \alpha \frac{L_f}{g} \ln \frac{T^*}{T_f^*} \right|^n \right]^{-m} \\ &= (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \left[1 + \left| \alpha \frac{L_f}{g} \ln \frac{T^*}{T_f^*} \right|^n \right]^{-m} \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

(17) 式を T^* で微分すると,

$$\frac{d\theta_{\text{ice}}}{dT^*} = \frac{(\theta_s - \theta_r) \alpha^2 L_f^2 n m \ln \frac{T^*}{T_f^*} \left| \alpha \frac{L_f}{g} \ln \frac{T^*}{T_f^*} \right|^{n-2}}{g^2 T^* \left(1 + \left| \alpha \frac{L_f}{g} \ln \frac{T^*}{T_f^*} \right|^n \right)^{m+1}} \quad (18)$$

(3) 式に (18) 式を代入することで, 見かけの体積熱容

量を T の関数とすることができ, これを用いて (4) 式を解くことができる. GCC モデルでは GCC 式を用いることによって T^* より h を求め, その h より θ_w を求めることで間接的に (1) 式の左辺第 2 項の潜熱を評価している.

2.2.3 Power モデルを用いた潜熱の取り扱い

2.2.2 節では, GCC モデルでは最終的に θ_{ice} を T の関数としてあらわせることを示した. 同様に θ_{ice} と T の関係を経験則的な多項式で直接近似することにより, 潜熱を含む熱移動方程式を解くことが可能となる. この関係式によって, GCC モデルを用いた場合と同じく潜熱放出項を計算することができる. その近似の 1 つとして Li et al. (2019) は Fr を温度の指数関数モデル (Power モデル) で表現した.

$$Fr = \frac{\theta_{\text{ice}}}{\phi} = \begin{cases} 1 - (1 - T + T_f)^a, & T \leq T_f \\ 0, & T > T_f \end{cases} \quad (19)$$

ここで a は Power モデルの経験的パラメーター [-] である. ここで (19) 式を θ_{ice} について T で微分すると,

$$\frac{d\theta_{\text{ice}}}{dT} = \phi a (1 - T + T_f)^{a-1} \quad T \leq T_f \quad (20)$$

GCC モデルを用いたときと同様に (3) 式に (20) 式を代入することで, もとの熱移動方程式を解くことができる. Power モデルでは T から直接 Fr および θ_{ice} を求めることで潜熱を評価している.

2.3 有限要素法による離散化手法

本研究では, 数値解析手法の 1 つである有限要素法 (Finite Element Method, FEM) を用いて熱移動の基礎方程式による温度の計算を行った. FEM は求めたい領域をメッシュで分割し, それぞれの要素内の微分方程式より導かれる弱形式を満たす解を求める方法である. その中でも重み付き残差法において, 基底関数と重み関数に同一の関数を用いる Galerkin 法を用いた. FEM では一般に支配方程式ごとに弱形式を求める必要があり, 支配方程式が変わると弱形式も変化する. 本研究では, TRM において体積熱容量 C を (3) 式で定義された C_a から潜熱を表現する第 2 項を除いて熱伝導方程式を定式化した. また, GCC モデルと Power モデルでは C を C_a として熱伝導方程式を定式化した. FEM を適用するために定式化された熱伝導方程式を (21) 式に示す.

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (21)$$

(21) 式を用いることで, いずれの潜熱の取り扱い方法においても同一の弱形式を使用し, 潜熱の取り扱い方法のみが異なる数値計算を行うことができる. ここで Ω を

\mathbb{R}^2 で有界な領域とし、(21) 式を満たす温度場 $T = T(x_i)$ を求めるために、三角形一次要素を用いて FEM で離散化を行った。最初に、全体座標系の基底関数 N_J と節点 J での温度 T_J を用いて温度の基底関数 \hat{T} を表すと、次のように表される。

$$\hat{T} = N_J T_J \quad J = 1, 2, \dots, l \quad (22)$$

ここで、 l は三角形有限要素分割における総節点数である。(22) 式を (21) 式に代入すると次のようになる。

$$\left(C \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j} \right] \right) = R \quad (23)$$

ここで、 \hat{T} が求める真なる解であれば残差 R は 0 になる。しかし、FEM による数値計算で求めた近似解は真なる解と一致することはないため、 R は 0 にならない。この 0 でない R に、重み関数 N_I を掛け合わせたものを領域全体で積分したものが 0 となるような近似解を求める。ただし $I = 1, 2, \dots, l$ である。

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} N_I R d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} N_I \left(C \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j} \right] \right) d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} N_I \left(C_I N_J \frac{\partial T_J}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda \frac{\partial (N_J T_J)}{\partial x_j} \right] \right) d\Omega = 0 \quad (24) \end{aligned}$$

(24) 式に Gauss の発散定理を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} C_I N_I N_J d\Omega \frac{\partial T_J}{\partial t} + \iint_{\Omega} \lambda \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} d\Omega T_J \\ &+ \oint_{\Gamma} N_I \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \mathbf{n}_i d\Gamma = 0 \quad (25) \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{n}_i は外向きの法線ベクトルである。すべての境界において Dirichlet 境界条件 ((8) 式) または断熱境界条件 $dT/dx_i = 0$ で与えられる場合に限り、(25) 式の左辺第 3 項が 0 となるため次のようになる。

$$\iint_{\Omega} C_I N_I N_J d\Omega \frac{\partial T_J}{\partial t} + \iint_{\Omega} \lambda \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} d\Omega T_J = 0 \quad (26)$$

(26) 式を行列形式で表すと次のようになる。

$$[M] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [D] \{T\} = 0 \quad (27)$$

ただし、質量項 $[M]$ 、伝導項 $[D]$ 、温度ベクトル $\{T\}$ は次のように表され、 N_e は総要素数である。

$$[M] = \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega} C_I N_I N_J d\Omega \quad (28)$$

$$[D] = \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega} \lambda \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} d\Omega \quad (29)$$

$$\{T\}^T = [T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_n] \quad (30)$$

ここで (27) 式を (7) 式で示した初期温度場 T_0 から陰解法で数値計算を行うために、ある時間ステップ t^k における時間刻み Δt を用いて離散化すると (31) 式を得る。

$$[M] \frac{\{T\}^{k+1} - \{T\}^k}{\Delta t} + [D] \{T\}^{k+1} = 0 \quad (31)$$

ここで、 $k, k+1$ は現在、1 個先の時間ステップである。ここで $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ を全体行列、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^l$ を既知ベクトル、 $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^l$ を時間ステップが $k+1$ の時の未知の温度ベクトルとすれば、(31) 式は、線形方程式に帰着できる。

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{b} \quad (32)$$

本研究では、前処理付き BiCGSTAB 法を用いて (32) 式の \mathbf{T} を求解するソルバーを Fortran 90 を用いて実装し、そのソルバーを用いて数値計算を行った。

2.4 TRM の実装手法

まず Fig. 1 の (1) で示す、時間ステップ t^k から t^{k+1} の場合について考える。このとき各節点で T が T_f より高い温度 T^k から凍結開始温度以下 T^{k+1} になるため、 ΔFr は (12) 式より次のように求められる。

$$\Delta Fr = \frac{C_p}{\rho_w \theta_w L_f} (T_f - T^{k+1}) > 0 \quad (33)$$

そして、次式に示すように元の凍結率 Fr^k より新たな時間ステップの仮の凍結率 \hat{Fr}^{k+1} を求める。

$$\hat{Fr}^{k+1} = Fr^k + \Delta Fr \quad (34)$$

\hat{Fr}^{k+1} が 1 を超えなければ正式な Fr^{k+1} とし、 T を T_f まで戻す。

$$Fr^{k+1} = \hat{Fr}^{k+1}, \quad T^{k+1} = T_f \quad (35)$$

次に Fig. 1 の (2) に示す、時間ステップ t^{k+1} から t^{k+2} の場合について考える。 \hat{Fr}^{k+2} が 1 を超えない場合では、(33)、(34) 式より Fr^{k+2} を決定し、 T^{k+2} を T_f に戻す。最後に Fig. 1 の (3) で示す、時間ステップ t^{k+2} から t^{k+3} の場合について考える。このとき \hat{Fr}^{k+3} が 1 を超え

るため、 F_r^{k+3} が1になるまでの潜熱放出量と T_f からの温度低下 ΔT_{low} に分割する。

$$\Delta T_{low} = \frac{\rho_w \theta_w L_f}{C_p} (\hat{F}_r^{k+3} - 1) \quad (36)$$

(36) 式より T^{k+3} を決定する。その後、 F_r^{k+3} を1にする。

$$\begin{aligned} T^{k+3} &= T_f - \Delta T_{low} \\ &= T_f + \frac{\rho_w \theta_w L_f}{C_p} (1 - \hat{F}_r^{k+3}) \end{aligned} \quad (37)$$

本節で述べた手法を、各時間ステップで温度解析の終了後に組み込むことで TRM を実装した。

2.5 解析における安定性

GCC モデルと Power モデルを用いた場合は凍結開始温度に到達すると見かけの熱容量が急激に増加するため、数値計算において安定性が問題となる。これまでに凍結に伴う C_a の急激な増加が引き起こす数値的な不安定性を解決するため、最大体積熱容量を用いた修正法や利用可能熱容量を用いた修正法が提案されてる。最大体積熱容量を用いた修正法 (Hansson et al., 2004) では、 C_a のなかで最大の見かけの体積熱容量 $C_{a,max}$ を用いて修正を行う。各計算で T が 0°C より高い状態から 0°C 以下になったとき、次の反復計算で用いる C_a を $C_{a,max}$ 、 T を基準温度にして再計算を行う。そのため、基準温度や時間ステップの大きさの設定によっては収束までの計算回数が増加することがある。また利用可能熱容量を用いた修正法 (Zheng et al., 2021) では、不飽和土の T_f を h に依存して低下させ、その低下した T_f からの利用可能熱容量を考量した温度に修正する。しかし、これらの修正法はいずれも (13) 式の GCC 式と土壤水分容量の関係を用いて修正を行っているので、Power モデルにはこれらの修正法を同じようには適用できない。そのため、本研究では T_f をまたぐ時間積分において熱収支を合わせる修正法を適用した。時間ステップ k から $k+1$ においてはじめて凍結開始温度を通過したとすると、その際の熱量の変化量は未凍土の体積熱容量 C_{unf} [$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$] を T^k から T^{k+1} まで積分したものである。凍結開始温度付近では体積熱容量の変化量は C_a の変化量と比べ十分に小さいので、この時間ステップにおける熱量の変化量は見かけの体積熱容量を T^k から修正温度 T_r^{k+1} [$^\circ\text{C}$] まで積分したものと等しくなる。

$$C_{unf} \int_{T^k}^{T^{k+1}} dT = \int_{T^k}^{T_r^{k+1}} \left(C_p - L_f \rho_{ice} \frac{\partial \theta_{ice}}{\partial T} \right) dT \quad (38)$$

未凍結領域では $C_{unf} = C_p$ であることに注意して (38) 式

を解くと次のようになる。

$$\begin{aligned} F(T_r^{k+1}) &= \\ C_{unf} (T_r^{k+1} - T^{k+1}) - L_f \rho_{ice} \theta_{ice}|_{T_r^{k+1}} &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

(39) 式は利用するモデルによっては解析的に解けないため、Secant 法を用いて数値的に解くことで T_r^{k+1} を求めた。Secant 法は非線形方程式の求根アルゴリズムの1つであり、適当な2つの初期値 $T_r^{k+1,0}$ 、 $T_r^{k+1,1}$ より (40) 式に示すように反復計算することで T_r^{k+1} の近似値を求める。

$$\begin{aligned} T_r^{k+1,q+1} &= \\ T_r^{k+1,q} - F(T_r^{k+1,q}) \frac{T_r^{k+1,q} - T_r^{k+1,q-1}}{F(T_r^{k+1,q}) - F(T_r^{k+1,q-1})} &= \end{aligned} \quad (40)$$

ここで、 q は Secant 法の反復回数である。求めた修正温度を用いて繰り返し計算を行うことで、数値計算の安定性を確保した。

2.6 物性値

本研究では砂質土壌を想定して、Table 1 に示す物性値を用いた。ここで密度、熱伝導率、比熱については高志・和田 (1961) より、 $\phi = 0.3$ のときの値を再計算し

Table 1 地盤物性値.
Ground properties.

定数名	記号	値	単位
間隙率	ϕ	0.3	1
潜熱	L_f	334560	J kg^{-1}
密度	ρ_s	2800	kg m^{-3}
	ρ_w	1000	kg m^{-3}
	ρ_{ice}	917	kg m^{-3}
熱伝導率	λ_s	3.78	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
	λ_w	0.6	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
	λ_{ice}	2.2	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
比熱	c_s	912	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
	c_w	4180	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
	c_{ice}	2100	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
凍結開始温度	T_f	0.0	$^\circ\text{C}$
	T_f^*	273.15	K
vG モデルのパラメーター	α	0.2	m^{-1}
	n	1.8	1
	m	$1 - 1/n$	1
残留体積含水率	θ_f	0.0	$\text{m}^3 \text{m}^{-3}$
飽和体積含水率	θ_s	0.3	$\text{m}^3 \text{m}^{-3}$
Power モデルのパラメーター	a	-6.02	1

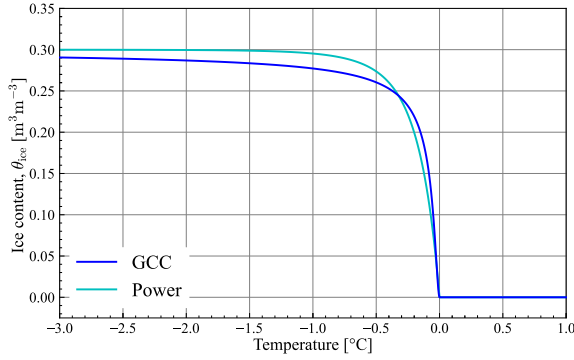


Fig. 2 GCC モデルと Power モデルでの体積含水率の温度依存性。
Temperature dependence of ice content using GCC and Power model.

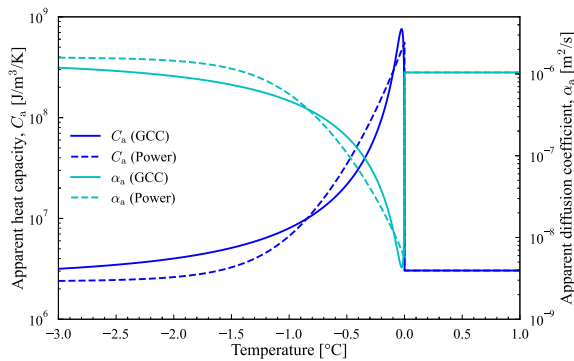


Fig. 3 見かけの熱容量 C_a と見かけの熱拡散係数 α_a の温度依存性。
Temperature dependence of apparent heat capacity C_a and apparent thermal diffusion coefficient α_a .

て使用した。Table 1 の Power モデルのパラメーター a は、(17) 式を用いて GCC モデルの T と θ_{ice} の関係を求め、その関係に基づき (19) 式を用いて最小二乗法で推定した。GCC モデルと、GCC モデルにフィッティングさせた Power モデルの T と θ_{ice} の関係を Fig. 2 に示した。次に、GCC モデルと Power モデルを潜熱処理に使う場合の見かけの熱容量 C_a 、見かけの熱拡散係数 α_a [$m^2 s^{-1}$] と T の関係を Fig. 3 に示した。ここで α_a は次のように定義される。

$$\alpha_a := \frac{\lambda}{C_a} \quad (41)$$

いずれのモデルを用いた場合でも C_a は凍結が始まると急激に増加し、温度の低下に伴い急激に低下する。さらに C_a の急増に追従するように α_a は凍結が始まると急激に低下し、温度の低下に伴い急激に増加する。また、 C_a のピークの値は Power モデルと比較すると GCC モデルの方が大きくなり、より鋭敏に減少している。本条件では T がおよそ $-0.3^\circ C$ まで θ_{ice} が GCC モデルのほうが多く、それ以下となると Power モデルの方が多くなる。また、潜熱の影響は Power モデルではおよそ $-2^\circ C$ までであるが、GCC モデルでは Power モデルよりも低い温度まで潜熱の影響がある。

2.7 計算領域と初期・境界条件、計算条件

本研究では x_1 方向に 2.0 m、 x_2 方向に 0.5 m の長方形の計算領域に対し、三角形メッシュで分割を行い、左端より 0.1 m、0.2 m、0.5 m 地点に T や θ_{ice} 等の時間変化を求めるための観測点を設定した。ここで計算では、領域左端を T_f 以下の一定温度に保ち、凍結が進行する状況を模した。Case 1 では地盤凍結工法を施工する場合を想定し、初期温度は一律に $18^\circ C$ 、領域左端に $-20^\circ C$ を与えた。また、Case 2 では Case 1 より高い温度で凍結させることを想定し、初期温度は一律に $5^\circ C$ 、領域左端に $-5^\circ C$ を与えた。Case 3 では Case 2 よりもさらに高い温度で凍結させることを想定し、初期温度は一律に $1^\circ C$ 、領域左端に $-2^\circ C$ を与えた。また、Case 4 では Case 1 よりも低い初期温度からより短い時間で凍結が進行するように、初期温度は一律に $10^\circ C$ 、領域左端に $-30^\circ C$ を与えた。ただし、すべての条件で領域左端以外の境界には断熱境界条件を与えた。分割された計算領域に対して、FEM によって離散化された (31) 式を適用し、Case 1 ~ 4 で設定した初期条件と境界条件を与えることで数値解を求めた。ここで、Case 1 では 10 日間、Case 2 ~ 4 では 20 日間計算を行い、その際の時間ステップ Δt はすべて同じ条件で計算した。

TRM を用いた計算において、 Fr は温度 T_f のときのみ増加するため、凍結中の熱物性値の取り扱いにはいくつかの手法が考えられる。本研究では GCC モデル、Power モデルと同じく熱物性値を θ_{ice} に依存させて変化させる方法 (TRM0) と、 Fr が 1 になるまでは未凍土の熱物性値を用い、 Fr が 1 になると凍土の熱物性値に切り替える方法 (TRM1) の二通りの手法で Case 1 と 2 の二条件で計算した。さらに、数値解と解析解との差分の比較のため、上記で示した Case 1 ~ 4 において、TRM, GCC モデル, Power モデルで計算された温度と、各 Case の条件を次に示す Neumann の解析解に適用して得られた温度との差分を求め、各モデルの特徴を明らかにした。

2.8 Neumann の解析解

凍結を考慮した 1 次元の熱伝導式の解析解の 1 つとして、Neumann の解析解 (Alfreds, 1966) が知られている。Neumann の解析解では、凍結現象を移動境界問題として取り扱い、凍結深 ξ [m] を挟んで未凍土領域と凍土領域に分割する (Fig. 4)。凍結領域および未凍結領域の温度分布は次のように与えられる。導出等の詳細については付録を参照されたい。

凍結領域の温度 T_1 $0 < x < \xi$:

$$T_1 = T_{co} + (T_f - T_{co}) \cdot \frac{G\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right)}{G\left(\frac{m}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)} \quad (42)$$

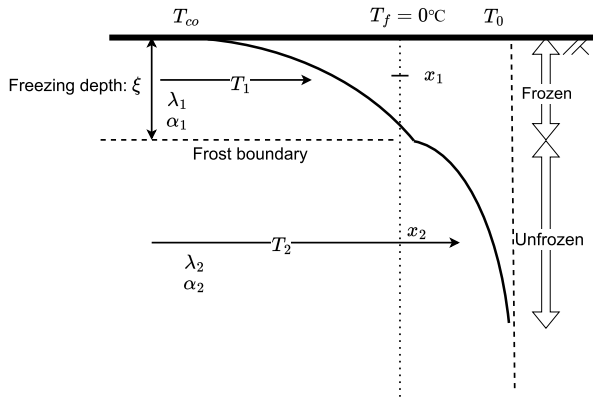


Fig. 4 Neumann の解析解の概念図：凍結深 ξ を挟んで上部は凍結，下部は未凍結領域である。
Conceptual diagram of Neumann's analytical solution: The region above the freezing depth ξ is frozen, while the region below is unfrozen.

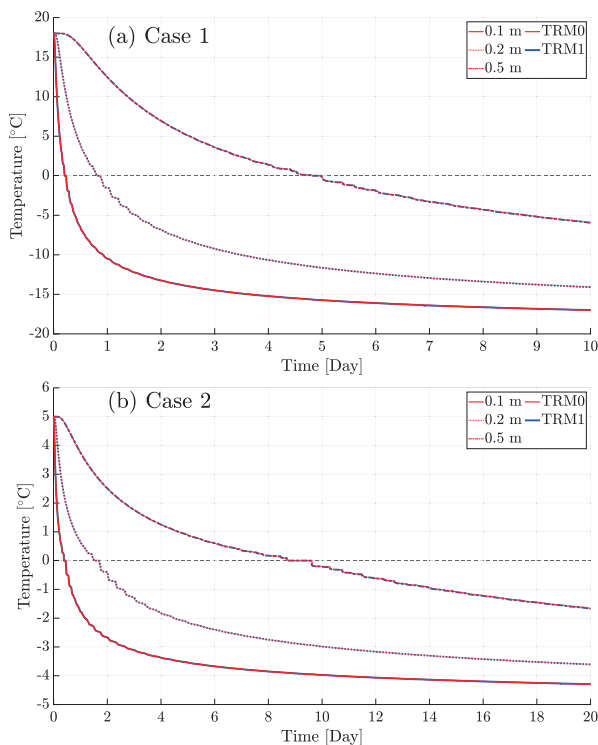


Fig. 5 凍結中の熱物性値の取り扱いによる温度回復法を用いた温度解析の比較，(a) Case 1，(b) Case2.
Comparison of temperature analysis using the TRM with handling of thermophysical properties during freezing, (a) Case 1, (b) Case2.

未凍結領域の温度 T_2 $x > \xi$:

$$T_2 = T_0 + (T_0 - T_f) \cdot \frac{G\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right)}{G\left(\frac{m}{2\sqrt{\alpha_2}}\right)} \quad (43)$$

ここで α_1 , α_2 はそれぞれ凍結，未凍結領域の熱拡散係数 [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$], x は凍結面からの距離 [m], T_{co} , T_0 はそれぞれ

凍結面の温度，初期温度 [$^{\circ}\text{C}$], m はある時間 t における ξ の位置を表すための熱物性値より求められる係数 [$\text{m s}^{-1/2}$], G はガウスの誤差関数である。本研究では， T_{co} および T_0 をそれぞれ 2.7 節で与えた左端の境界条件の温度および初期温度とした。また，熱拡散係数は Table 1 より計算した値を用いた。そして，(42)，(43) 式を用いて，Case 1～4 のそれぞれの条件での Neumann の解析解を求めた。

3. 結果と考察

3.1 温度回復法での熱物性値の取り扱いの影響

Case 1, Case 2 について TRM0 および TRM1 によって計算した観測点での温度変化を Fig. 5 に示した。Case 1, 2 のいずれの条件でも，温度は 0°C 以下のときに停滞と低下を交互に繰り返しながら段階的に低下した。TRM での解析を行う際には，凍結中に T を T_f に回復させる処理があるため， T_f での温度の停滞が発生する。この温度が 0°C で停滞した影響が熱伝導によって伝播することによって，低い温度域まで温度の停滞と低下が繰り返されたと考えられる。ここで TRM0 と TRM1 の両条件での温度解析を比較すると Case 1, Case 2 のいずれの条件であっても，温度変化には大きな差異は生じなかった。TRM による解析では， 0°C でのみ水の相変化が起こるため，潜熱の影響を受ける時間間隔が小さい。そのため，熱伝導率および体積熱容量が凍結中の θ_{ice} に依存しているかどうかにかかわらず，TRM での解析では未凍土または凍土の熱物性値を使用したため，熱物性値の取り扱いによる差異はほとんど見られなかったと考えられる。よって以降の TRM を用いた計算では，GCC モデルや Power モデルに合わせて熱物性値を Fr に依存させて変化させる方法 (TRM0) を用いる。

3.2 潜熱の取り扱いの影響

2つの計算条件，Case 1, Case 2 について TRM, GCC モデル，Power モデルを用いた温度の計算結果を Fig. 6, 凍結率の計算結果を Fig. 7 に示した。また，各計算条件における Neumann の解析解も併せて示した。Fig. 6 より，Case 1 では GCC モデル，Power モデルを用いた場合は，解析解と比較すると若干温度低下が早いものの，3種類の潜熱の取り扱い方法での計算結果に大きな差異はなかった。一方 Case 2 では，GCC モデルや Power モデルを用いた場合よりも TRM を用いた場合の方が温度低下がより早く生じた。また各条件において，各観測点での温度が 0°C 以下になるまでの時間を Fig. 8 に示した。Case 1 では，いずれの観測点でも潜熱の取り扱い手法によって 0°C 以下になるまでの時間に大きな差は見られなかった。一方で，Case 2 の 0.5 m の観測点では，TRM を用いた場合，GCC モデルおよび Power モデルを用いた場合と比較して，温度が 0°C 以下になるまでの時間が約 2 日早まった。また，両 Case において GCC モデルと Power モデルを用いた温度の計算結果および温度が 0°C 以下になるまでの時間はほとんど同じ

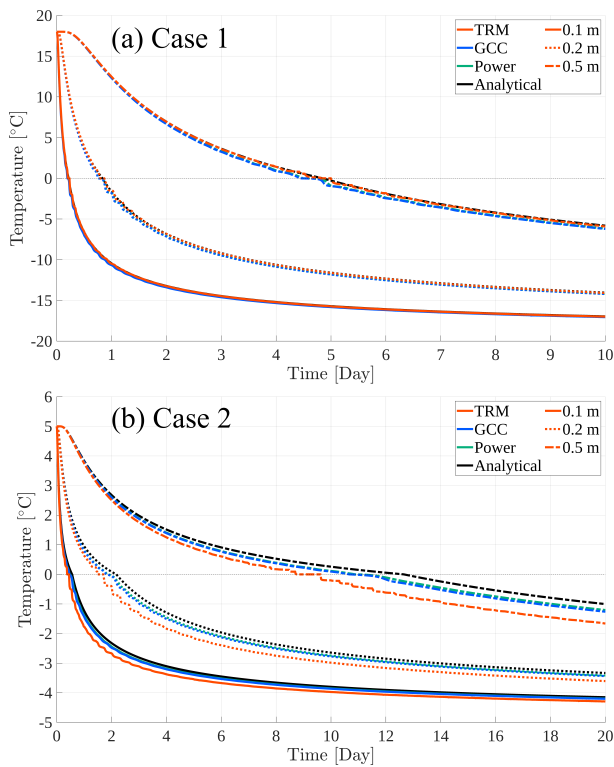


Fig. 6 潜熱の処理方法による各観測点での温度変化の比較, (a) Case 1, (b) Case 2. Comparison of temperature changes at each observation point by latent heat treatment methods, (a) Case 1, (b) Case 2.

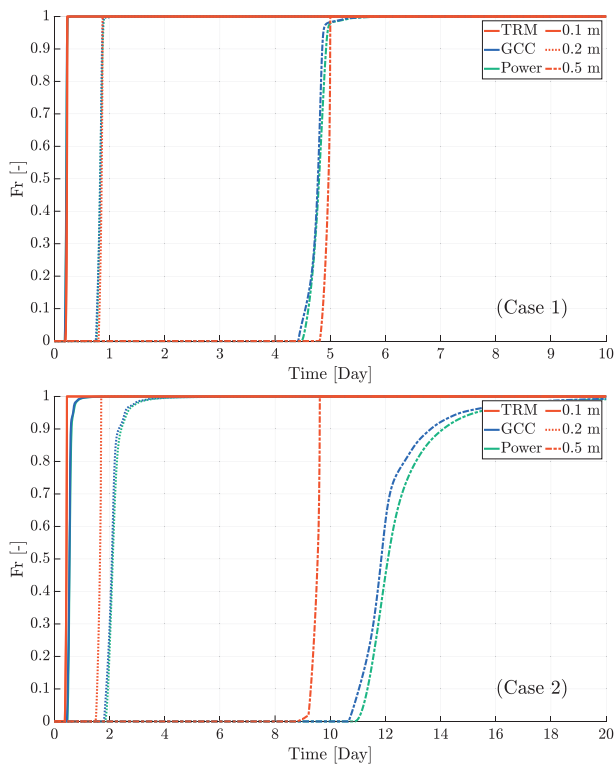


Fig. 7 潜熱の処理方法による各観測点での凍結率変化の比較. Comparison of freezing rate changes at each observation point by latent heat treatment methods.

であった。

Fig. 7 より, Case 1 で GCC モデルと Power モデルを用いた場合, 0.5 m の観測点で Fr の増加し始めるタイミングが TRM を用いた場合よりも早い, 凍結が完了するタイミングはほぼ同じだった. また, GCC モデルと Power モデルの間では Fr の増加にほとんど差異は生じなかった. Case 2 では TRM を用いた場合すべての観測点で GCC モデルと Power モデルを用いた場合に比べて Fr の増加が早く, Fr が 1 に達するまでの時間が短くなっていた. また, 0.5 m の観測点でのみ, GCC モデルを用いた場合のほうが Power モデルを用いた場合よりも Fr の増加が早くなっていた. いずれの条件においても, TRM を用いた解析では Fr の増加が急激に進行し, 最終的に Fr が 1 になった. 一方, GCC モデルおよび Power モデルによる解析では, Case 2 の場合には凍結が進行すると Fr の増加が緩やかに進行し, Fr が 1 に漸近した. ここで TRM を用いた解析では θ_{ice} が T の関数になっておらず, 現在の θ_{ice} と C_p のみで次の時間ステップにおける Fr を決定している. 本研究の解析条件では (12) 式の右辺における ΔT にかかる係数は Fr が 0.8 程度まで大きく変化しない. しかし, 凍結が進行することで係数の分母にある θ_w が減少し, 液状水の減少に伴って急激に増加する. そのため, 凍結が進行すると単位時間あたりの Fr の増加割合は大きくなる. それに比べて Fig. 2 で示したように GCC モデルや Power モデルを用いた場合では θ_{ice} が T の関数として表現されており, 土壤の温度環境の違いに対し Fr の変化がより敏感に反応する. そのため初期温度と境界温度の差が小さい Case 2 の解析では凍結の進行にともない単位時間あたりの Fr の増加割合が緩やかになったと考えられる. また, Fig. 2 で示したように温度が T_f 以下になった初期段階では GCC モデルのほうがより θ_{ice} の増加が多く, それに伴う熱伝導率の増加と体積熱容量の減少によって Fr の増加が早く生じたと考えられる. また, GCC モデルにおける T と θ_{ice} の関係を再現するように Power モ

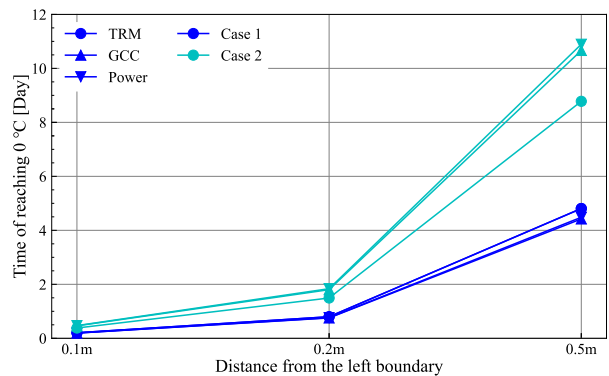


Fig. 8 それぞれの潜熱処理方法における各観測点の温度が 0 °C 以下となる時間の比較. Comparison of time reaching 0 °C for each observation point based on different latent heat treatment methods.

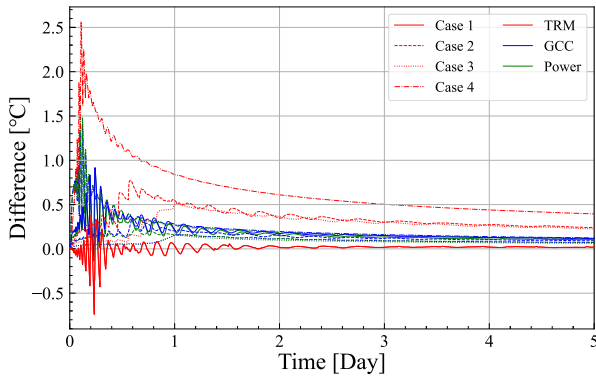


Fig. 9 左端より 0.1 m の観測点における解析解と数値解の温度差分の比較.

Comparison of the difference between analytical and numerical solutions at an observation point 0.1 m from the left-hand edge.

デルのパラメーター a を適切に設定することで、GCC モデルと Power モデルのどちらを用いてもほぼ同様の解析が可能であることが示された。

次に Case 1 ~ 4 の条件での左端から 0.1 m での観測点で解析解と数値解の温度差分を計算し、5 日目までの結果を Fig. 9 に示した。Case 1 では、TRM を用いた場合、GCC モデルおよび Power モデルを用いた場合に比べて温度差分が小さくなった。一方、Case 1 以外の条件では、TRM を用いると GCC モデルや Power モデルに比べて温度差分が大きくなる傾向が見られた。すべての条件において、GCC モデルと Power モデルを用いた場合はほぼ同様の温度差分が生じ、時間が経過すると両者の温度差分も同程度に収束した。しかし、TRM を用いた解析では、時間が経っても条件によって温度差分が異なる値に落ち着いてきた。TRM では、計算条件に応じて温度解析に次の 2 つの影響が現れる。一つは、 T_f での温度停滞の影響、もう一つは未凍土または凍土の熱物性値の違いによる影響である。Case 2 や Case 3 のように比較的高い温度（つまり小さい温度勾配）で凍結が進行する条件では、温度停滞の影響が温度差分に現れた。また凍結が進みやすい条件である Case 4 では、未凍土と凍土の熱物性値の違いによって他の条件よりも温度差分が大きく維持される傾向が確認された。また、温度差分のピークは、Fig. 6 において観測点 0.1 m の解析解が T_f を下回るタイミングと一致している。温度が T_f より低くなり θ_{ice} が多くなると、熱伝導率が増加し体積熱容量は減少する。このように熱物性値が変化することにより、より凍結しやすい条件になるため、温度差分のピークが解析解において T_f を下回るタイミングと一致した。

4. おわりに

本研究では、凍結中の飽和土壌における温度変化および凍結率の予測を行うために、有限要素法に基づく数値

解析用ソルバーを開発した。凍結温度からの温度低下による熱量変化を潜熱放出量として取り扱う温度回復法、熱力学的相平衡より不凍水圧力および不凍水量を求めることで間接的に含水量を求める Generalized Clausius-Clapeyron モデル、および凍結率を多項式で直接近似するモデルのひとつである Power モデルの 3 つの手法を用いて解析を実施した。その際、初期温度と冷却温度が異なる 4 つのケースについて解析を行い、各モデルの特徴とその適用範囲を検討した。さらに、温度回復法における凍結中の熱物性値の取り扱いに関して、熱物性値が体積含水率に依存する場合と依存しない場合の違いについて比較した。温度回復法では、凍結が進行する時間が短いため凍結中の熱物性値の変化は小さく、熱物性値が体積含水率に依存するかどうかにかかわらず温度変化に大きな差異は見られなかった。また、地盤凍結工法を適用する際の一般的な解析条件においては、すべての潜熱の取り扱い手法において同様な解析ができることが示された。しかし、凍結に時間がかかる条件下では、温度回復法による解析において温度低下がより早く進行することが確認された。これは、凍結率の温度に対する反応性の違いによるものである。一方、支配方程式内で潜熱を扱う GCC モデルと Power モデルにおいては、温度回復法に比べて柔軟に温度解析が可能であり、両モデルを用いた解析結果はほぼ同様の結果となることが示された。これにより、GCC モデルや Power モデルは、広範囲な条件下で安定した温度解析を提供できることが明らかとなった。今後の研究では、これらの知見を基にさらなるモデルの改良や適用範囲の拡大を図り、地下水流れを含めた凍結過程の温度解析を実現することが期待される。

付録

凍結を考慮した Neumann の 1 次元熱伝導の解析解の導出過程について説明する。半無限地盤において凍結領域と未凍結領域に分割し、その両領域における熱伝導方程式を凍結深 ξ [m] で接続することで、凍結を考慮した熱伝導方程式を解析的に導出している。

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \quad (44)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \quad (45)$$

ただし T_1 , T_2 はそれぞれ凍結、未凍結領域の温度 [°C]、 α_1 , α_2 はそれぞれ凍結、未凍結領域の熱拡散係数 [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] である。この支配方程式を解くために、以下のような初期・境界条件を設定した。

初期条件 $x > 0$, $t = 0$ のとき, $T_1 = T_2 = T_0 = \text{Const.}$

境界条件 (1) $x = 0$, $t \geq 0$ の時, $T_1 = T_{co} < T_f$.

境界条件 (2) $x \rightarrow \infty$ の時, $T_2 \rightarrow T_0 = \text{Const.}$

境界条件 (3) $x = \xi$, $t > 0$ の時, $T_1 = T_2 = T_f = 0^\circ\text{C}$.

ここで T_{co} , T_0 はそれぞれ凍結面の温度, 土壌の初期温度 [$^\circ\text{C}$] である. ここで, フーリエの法則と潜熱放出量をもとに地点 ξ での熱収支式を考えると次のようになる.

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{L_f \cdot \rho_s \cdot w} \left[\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} \right] \quad (46)$$

ただし w は含水比 [$\text{kg}^3 \text{kg}^{-3}$], λ_1 , λ_2 はそれぞれ凍結, 未凍結領域の熱伝導率 [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$] である. ここで, ガウスの誤差関数 G を次のように表す.

$$G(x\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x\eta} e^{-\beta^2} d\beta$$

(44), (45) 式を満たす特殊解の 1 つはガウスの誤差関数を用いて次のように表される.

$$T_1 = B_1 + D_1 \cdot G(x\eta_1), \quad 0 < x < \xi \quad (47)$$

$$T_2 = B_2 + D_2 \cdot G(x\eta_2), \quad x > \xi \quad (48)$$

ただし B_1 , B_2 , D_1 , D_2 は熱物性値と ξ により求められる定数である. また, η_1 , η_2 は次のように定義される.

$$\eta_1 := \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \quad \eta_2 := \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2 t}}$$

ここで ξ が時間の $1/2$ 乗 \sqrt{t} に比例し, その比例係数を m とおくと ξ は次式であらわされる.

$$\xi = m \cdot \sqrt{t} \quad (49)$$

最終的に (47), (48) 式を代入した (46) 式と (49) 式の t での微分が等価になるため, 次に示す m についての超越方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{L_f \cdot \rho_s \cdot \sqrt{\pi} \cdot w \cdot m}{2} = & \\ & \frac{\lambda_1}{\sqrt{\alpha_1}} \cdot (T_f - T_{\text{co}}) \cdot \frac{\exp\left(-\frac{m^2}{4\alpha_1}\right)}{G\left(\frac{m}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)} \\ & + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\alpha_2}} \cdot (T_0 - T_f) \cdot \frac{\exp\left(-\frac{m^2}{4\alpha_2}\right)}{1 - G\left(\frac{m}{2\sqrt{\alpha_2}}\right)} \end{aligned} \quad (50)$$

土壌パラメーターの代入によって (50) 式の根 m を二部

探索で求め, その求めた m を用いて (49) 式より ξ を求めることができる. 最終的に, 設定した初期・境界条件を満たす任意の地点, 時間における解析解を求めると本文中 (42) 式, (43) 式を得る.

凍結領域 $0 < x < \xi$:

$$T_1 = T_{\text{co}} + (T_f - T_{\text{co}}) \cdot \frac{G\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right)}{G\left(\frac{m}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)} \quad (42)$$

未凍結領域 $x > \xi$:

$$T_2 = T_0 + (T_0 - T_f) \cdot \frac{G\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right)}{G\left(\frac{m}{2\sqrt{\alpha_2}}\right)} \quad (43)$$

引用文献

- Alfreds, R.J. (1966): Thermal soil mechanics, pp. 236–246. Rutgers University Press, New Jersey.
- Edlefsen, N. and Anderson, A. (1943): Thermodynamics of soil moisture. *Hilgardia*, 15(2): 31–298.
- Hansson, K., Šimůnek, J., Masaru, M., Lundin, L. and van Genuchten, M.Th. (2004): Water flow and heat transport in frozen soil: Numerical solution and freeze-thaw applications. *vadose Zone Journal*, 3(2): 693–704.
- 伊藤 謙, 吉田聡志 (2016): 我が国における地盤改良技術の変遷 5. 人工地盤凍結工法とその展開. *材料*, 65(12): 883–889.
- Jury, W.A. and Horton, R. (取出伸夫監訳, 井上光弘, 長裕幸, 西村拓, 諸泉利嗣, 渡辺晋生訳) (2006): 土壌物理学 — 土中の水・熱・ガス・化学物質移動の基礎と応用 —, p. 179. 築地書店, 東京.
- Li, Z., Chen, J., Sugimoto, M. and Ge, H. (2019): Numerical simulation model of artificial ground freezing for tunneling under seepage flow conditions. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 92: 103035.
- Nicolosky, D.J., Romanovsky, V.E. and Panteleev, G.G. (2009): Estimation of soil thermal properties using in-situ temperature measurements in the active layer and permafrost. *Cold Reg. Sci. Technol.*, 55(1): 120–129.
- 新山英輔 (1993): 凝固シミュレーションの基礎, *軽金属*, 43(11): 636–642.
- 西垣誠, 吉田美彦, 河野伊一郎 (1993): 不飽和砂質地盤の凍結過程における土中水の移動. *土木学会論文集*, 1993(475): 39–48.
- 松岡啓次, 隅谷大作, 小椋浩 (2015): 地盤の凍結・解凍予測の

- ための三次元非定常熱伝導解析, 土木学会論文集 C (地圏工学), 71(2): 125–135.
- 生頼孝博 (1997): 地盤凍結工法とその開発. 雪氷, 59(3): 159–167.
- Sass, J.H., Lachenbruch, A.H. and Munroe, R.J. (1971): Thermal conductivity of rocks from measurements on fragments and its application to heat-flow determinations, *Journal of geophysical research*, 76(14): 3391–3401.
- 高志 勤 (1969): 凍結管列の凍結結合に対する地下水流の影響について. 土木学会論文報告集, 1969(161): 51–58.
- 高志 勤, 和田正八郎 (1961): 土壌凍結工法について [I]. 冷凍, 36(408): 1–15.
- 高志 勤, 松浦一三, 谷口晴美 (1961): 土壌凍結工法について [II]. 冷凍, 36(410): 1–20.
- 凍土分科会 (2014): 凍土の知識 — 人工凍土壁の技術 —. 雪氷, 76(2): 179–192.
- van Genuchten, M.Th. (1980): A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44(5): 892–898.
- 渡辺晋生, 取出伸夫, 坂井 勝, Šimůnek, J. (2007): 凍結を伴う土壌の水分・熱・溶質移動モデル. 土壌の物理性, 106: 21–32.
- Williams, P.J. (1964): Unfrozen water content of frozen soils and soil moisture suction. *Geotechnique*, 14(3): 231–246.
- Williams, P.J. and Smith, M.W. (1989): *The frozen earth: Fundamentals of geocryology*, pp. 189–190. Cambridge University Press, Cambridge.
- Zheng, C., Šimůnek, J., Zhao, Y., Lu, Y., Liu, X., Shi, C., Li, H., Yu, L., Zeng, Y. and Su, Z. (2021): Development of the Hydrus-1D freezing module and its application in simulating the coupled movement of water, vapor, and heat. *Journal of Hydrology*, 598: 126250.



This article is an open access article under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

要 旨

地盤凍結工法では、地盤の強度および遮水性を確保するための凍土を人工的に造成する。凍土造成において、凍結時の潜熱放出を考慮しながら凍結過程を予測することは重要な役割を持つ。本研究では飽和地盤凍結過程における潜熱の取り扱いについて、解析結果を比較することでその計算手法を検討した。安定化手法を取り入れた有限要素法を利用して熱伝導方程式を定式化し、温度回復法、Generalized Clausius-Clapeyron 式、指数関数モデルを用いて潜熱を評価した。凍結に時間がかからない条件ではいずれの潜熱処理方法でも十分な温度解析は可能であるが、凍結に時間を要する条件では温度回復法での解析より他の方法での解析を用いることで温度変化が柔軟に表現できることが示された。

キーワード：土壌凍結，潜熱，数値解析，有限要素法