

古典を読む

L.A. Richards 著

「多孔質体を通る液体の毛管伝導」

登 尾 浩 助*

Reviewing classical studies in soil physics

“Capillary conduction of liquids through porous mediums”

By L.A. Richards

Physics, 1 : 318-333 (1931)

Kosuke NOBORIO*

* School of Agriculture, Meiji University, 1-1-1 Higashimita, Tama-ku, Kawasaki, 214-8571

Key words : water movement, soil water content, matric potential, hydraulic conductivity, hysteresis

1. はじめに

土壌中の水分移動を表す偏微分方程式は、現在では学部学生が受講する土壌物理学の講義で解説されるほど身近になっている。この微分方程式は、特に、開発者の名前にちなんでリチャーズ式 (Richards' equation) であって、Richard's equation ではないことに注意) と呼ばれる。開発者の Lorenzo Adolph Richards が、アメリカ合衆国・コーネル大学大学院 Ph. D. (Doctor of Philosophy) 課程在学中に行った研究成果である。

Richards の論文について語る前に、Richards 個人について紹介しよう。Richards は、1904 年 4 月 24 日にアメリカ合衆国ユタ州のフィールドィング (Fielding) という小さな町に生まれた。ユタ農業大学 (現ユタ州立大学) を 1926 年に卒業後、1927 年には同大学から物理学で修士号を取得している。ここで彼は、ユタ農業試験場の Willard Gardner 教授から土壌物理学の手ほどきを受けた。その後、コーネル大学大学院に進学して、1931 年に Ph. D. を取得後、短期間アイオワ州立大学に籍を置き、アメリカ合衆国農務省の塩類研究所で定年を迎えるまで精力的に研究を行った。塩類研究所時代には、塩類研究者にとってバイブル的存在であるハンドブック 60 (Richards, 1954) の編纂に当たった。また、圃場用水量と永久しおれ点の定義も彼の研究成果である。彼は、

1993 年に輝かしい生涯を閉じている。在職していた 1970 年前半までに塩類研究所を訪れた方は、ひょっとしたらこの偉大な土壌物理学者に会う機会があったかもしれない。取出伸夫氏 (私信, 2008) は、「1993 年に Richards が亡くなったとき、塩類研究所の研究員としてリバーサイドにいました。Richards の技官のような立場であった日系 2 世の Gen Ogata さん (W.A. Jury の Soil Physics の図 4.21 の共著者) に、サンフランシスコの南のモンレーという海のきれいな街の老人施設で亡くなったことを聞かされました。晩年はアルツハイマーを患い、ご家族の介護を受けていたそうです。Gen さんも 2003 年 10 月に亡くなりました。」と回想している。

2. 論文を読む

本報で紹介する Richards (1931) の論文は、(1)「序文」、(2)「毛管作用に影響する力」、(3)「不飽和媒体中の液体」、(4)「毛管伝導度の実験」、(5)「理論とデータの適用」、そして (6)「毛管ポテンシャルと含水量の関係」の 6 章から構成される。Richards は毛管流に対する連続の式 (これがリチャーズ式と呼ばれる) を提案し、式の中の重要なパラメータである毛管伝導度 (現在では水理伝導度あるいは不飽和透水係数と呼ばれる) を求めるための実験装置の開発を行い、実際に含水量または毛管ポテンシャルに依存する毛管伝導度を求めた。さらに、

* 明治大学農学部 〒214-8571 川崎市多摩区東三田 1-1-1

キーワード : 水分移動, 土壌水分量, 毛管ポテンシャル, 透水係数, ヒステリシス

1 含水量と毛管ポテンシャルの関係にはヒステリシスが存在することを突き止めている。

2.1 序文

「序文」は、「毛管現象」の定義が、当初の細管内の液体運動という定義から多孔質体中での液体流れといった広い定義にも使われてきたという記述から始まる。そして Buckingham が 1907 年に毛管引力が保存力場を構成することと毛管ポテンシャルを定義したことを紹介している。Buckingham は、土壌物理の基礎を築いた重要な科学者の一人である。彼は本報で紹介する Richards ほど恵まれた時間を過ごしていない。Buckingham はアメリカ合衆国農務省の研究所に 1902 年から 1906 年まで在職した。そして農務省退職後はアメリカ標準局（現アメリカ国立標準・技術研究所）に在職し、1937 年に定年を迎えた。農務省退職後は土壌物理にいっさい関わっていない。上司との関係が上手くいかなかったことが農務省を去る原因であったと言われる。Buckingham の生涯と業績は、Philip (1974), Nimmo and Landa (2005), Narasimhan (2007) などに詳しい。

次に、Richards のユタ州立大学時代の指導者であった Willard Gardner らが、この毛管ポテンシャルは水膜内の圧力と非常に強い関係が認められるので、粘土素焼物を使って測定可能であると指摘したことを紹介している。ところで、この粘土素焼物を使ったテンシオメーターは、Willard Gardner の 1920 年代の発明であると長年考えられていたが、Or (2001) が、1908 年以前に Livingston が提案していた事実を発見した。そして Richards 自身も、多孔質体が液体で濡れていて不飽和の時は水膜内の圧力は大気圧以下であって、多孔質体中の液体の量に依存する事を、1928 年に発表している。最後に、毛管流に対する様々な問題を、金属中の熱伝導と電気伝導の理論と実験に類似させることで解決したことを述べている。

2.2 毛管作用に影響する力

「毛管作用に影響する力」の章では、湾曲している液体表面によって作り出される圧力差は、表面張力に比例して曲率に反比例する式を示すことから始めた。細管内の流れを表す良く知られたポアズイユの法則は実験と極めて良く一致するが、飽和多孔質体中の水分の流れに対してはそうではない。一樣な球形ビーズを充填した単純化した理想的な系においてすら水が通過する部分の複雑な配置のため、種々の単純化した仮定が必要であると結んだ。

2.3 不飽和媒体中の液体

「不飽和媒体中の液体」の章で Richards 式が登場する。先に紹介した湾曲する液体表面が作り出す圧力式を

水と大気に適用して、大気圧を基準に考えると、大気圧以下の圧力は負値で表される。多孔質体中の水が自由水と接触していて、重力に対して平衡状態にある時の水圧と自由水面からの高さの関係を導いている。この関係に対して彼は、既発表の実験結果 (Richards, 1928) を再掲している。次に、飽和多孔質体中における水分フラックスが水頭勾配と伝導度の積で表されるダルシーの法則を紹介した。実験結果から流れと流れを生じさせる因子を一般化した数学的關係を導くことが可能であり、フーリエの法則（熱伝導）やオームの法則（電気伝導）に類似しているダルシーの実験的法則もこれらの法則と同様に一般化の例であると書いた。飽和多孔質体中の水分移動実験によって一般化されたダルシーの法則が、不飽和多孔質体中の水分移動にも適用できる妥当性を、Richards は次のように説明している。

孔隙に水と空気が存在している不飽和状態を考えると、水が移動できる部分の有効断面積は飽和状態に比べて減少する。もし、この空気の部分が土粒子で満たされていると考えても、水の流れの状態には変化がなく、流れと流れを生じさせる力の関係も保持される。これは、ダルシーの法則が粒子の大きさや充填の状態には依存しない性質による。従って、多孔質体中の飽和流と不飽和流の違いは、不飽和流の圧力は毛管力によって決まることと伝導度が媒体の水分含量に依存することである。ここにおいて Richards は、不飽和多孔質体を通る液体の動きを毛管流 (capillary flow)、そしてダルシー法則中の K を毛管伝導度 (capillary conductivity) と呼ぶことにした。

ところで Buckingham は、ダルシーの存在を知ることなく、不飽和土壌中においてダルシーの法則に相当する法則が成立することを独自に発見したと考えられている (Nimmo and Landa, 2005)。そのため近年では、不飽和土壌中の水分フラックスを表す際にはダルシー・ Buckingham の法則と呼ぶ事が多い。Richards は「序文」のなかで Buckingham の功績を認めているにも関わらず、水分フラックスを表す式を紹介する際には、ダルシーの法則と呼んでいる。

今日 Richards 式として知られている方程式は、毛管流に対する連続式として次式のように登場する。Richards は、最初から 3 次元の移動現象を考慮している。

$$\nabla q = -\rho_s \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1)$$

ここで、 ∇q は流れのダイバージェンス、 ρ_s は乾燥密度 (原著では、単位体積当たりの乾燥媒体の重さ)、 $\partial \theta / \partial t$ は時間による水分含量の変化割合である。さらに Richards は、毛管容量 (現在では水分容量と呼ばれる) を定

義して、連続式を次式のように変形した。

$$\nabla q = -\rho_s A \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2)$$

ここで、 $A = d\theta/d\phi$ は毛管容量、 ϕ は毛管ポテンシャルである。次にダルシーの法則を次式のように表した。

$$q = -K \nabla (\phi + \psi) \quad (3)$$

ここで、 ψ は重力ポテンシャルである。直交座標系の z 軸鉛直方向の上向きを正にとって最終的に

$$K \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + g \frac{\partial K}{\partial z} = -\rho_s A \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (4)$$

と表した (原著(15)式)。この式は、 K の非線形性が非常に大きいために解析的に解くことは極めて困難である。物理現象を表す式 (連続式とダルシーの法則) が残るように、現在ではここまで展開しないのが通常である (Campbell, 1985)。

Richards が ϕ を独立変数にしたことに対して、Philip (1974) は、式の見かけがわずかに複雑になったことと、 ϕ を独立変数とした拡散方程式は幾分古びているので物理的な利点はあるが彼の選択は少し不幸だった、と評した。 ϕ を独立変数にして拡散方程式を表すことの物理的な利点は、飽和と不飽和多孔質体中の水分移動に対して単一の方程式が連続的に適用可能である点だと考えられる。 ϕ を独立変数とした拡散方程式は、後年 Celia *et al.* (1990) によって ϕ 形式 (“ ϕ -based” form) と呼ばれた。Philip が斬新だと考えた θ を独立変数とした拡散方程式の出現は、Richards (1931) の発表から Klute (1952) の論文まで 20 年間待つ必要があった。 θ を独立変数とした拡散方程式は、後に θ 形式 (“ θ -based” form) と呼ばれる事になる (Celia *et al.*, 1990)。Klute (1952) は、1 次元水平方向の水分浸潤問題に θ 形式の拡散方程式をボルツマン変換して適用した。Celia *et al.* (1990) は、(1) 式のように θ と ϕ が混在している方程式を混合形式 (mixed form) の拡散方程式と呼んだ。

コンピュータの進歩によって数値計算が容易に行えるようになると、不飽和多孔質体中の水分移動問題が盛んに扱われるようになる。 θ 形式の拡散方程式も ϕ 形式の拡散方程式も数学的には等価であるので、どちらを使っても答えは同じであるはずであると多くの研究者と技術者は考えていた。ところが、数値計算には様々な誤差がつきまとうため、質量収支誤差が小さくなくなりくい欠点がある。Celia *et al.* (1990) は、 ϕ 形式、 θ 形式そして混合形式に変形した Richards 式の数値計算を行い、最も質量収支誤差が小さい形式を発見した。それは、Celia *et*

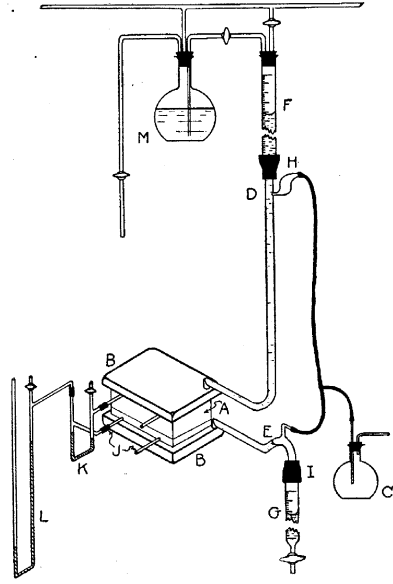


図-1 不飽和毛管伝導度(不飽和透水係数)を測定するために Richards が考案した装置 (Richard, 1931)

Fig. 1 Apparatus for measuring capillary conductivity in unsaturated soil developed by Richards (Richards, 1931)

al. が混合形式と呼んだ(1)式の水分量に基づく連続式を用いた形であった。Celia *et al.* (1990) 以降に発表された論文では、混合形式を使うことが多くなった。

2.4 毛管伝導度の実験

Richards は、導出した偏微分方程式を解くために必要な K の測定を「毛管伝導度の実験」として行った。図-1 に示す Richards が提案した実験装置は、現在使われているものとほとんど変わらない。(3) 式の 1 次元のダルシーの法則を K について整理すると、水分フラックスと毛管ポテンシャル勾配の逆数が右辺に現れる。右辺の各項は測定が可能であるので K を計算することができると Richards は考えた。毛管ポテンシャル勾配は、ユタ州立大学時代に Willard Gardner から手ほどきを受けたテンシオメーターを使えば直接測定が可能である。砂、壤土、粘土の 3 種類の土壌について不飽和透水係数 K の測定に初めて成功した。

2.5 理論とデータの適用

「理論とデータの適用」の章では、定常状態における鉛直 1 次元水分移動を想定して、(4) 式を (5) 式に低次元化した (原著(19)式)。

$$K \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + g \frac{\partial K}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

さらに、壤土に対する実験結果 (原著 Fig. 3) から $K = a\phi + b$ のような一次式で表されると仮定した。これらの式を解析的に解いて、 ϕ に対する z の関係を導出した。

グリーンビル壤土に対して $z=0$ cm に地下水水面 ($\phi=0$ cm) 設定して、定常流がある場合と重力に対して静的な平衡状態に置かれた場合の $z \leq 100$ cm に対する ϕ と θ を図示した (原著 Fig. 4)。定常流に対する上端 $z=100$ cm における境界条件を $\phi = -600$ cm とした。これは、彼が実験で得た毛管伝導度データの最低値に対応する毛管ポテンシャルに等しいと述べている。このように変数を既知の値に設定した境界条件を、ディリクレ (Dirichlet) 境界条件または第1種境界条件と呼ぶ。水分フラックスがゼロ以外の条件下における毛管ポテンシャルの空間分布が、静的平衡条件下のそれとは異なり線形的でない事を示した初めての論文だと思われる。土壌水分移動に対する連続式がこの論文まで世の中に存在していないので、初めてと考えると差し支えないであろう。不飽和多孔質体中における水分移動に関する記述はこの章で終了する。

2.6 毛管ポテンシャルと含水量の関係

最後の章である「毛管ポテンシャルと含水量の関係」では、 ϕ と θ の関係に対する新しい実験結果を図示している (原著 Fig. 5)。 ϕ と θ の関係は、既に Richards (1928) で3種類の土性に対して得ていたが、この章では壤土を使って ϕ と θ の関係にヒステリシスが存在することを示した。

この章でも Richards は新しい実験装置を開発して、一般土壌のヒステリシスを発見した。しかし、厚さ 4 mm の土壌試料を使った実験であったので、水分量の変化に伴って土壌の充填状態が変化したためにヒステリシスが発生した可能性を否定していない。このような土壌構造の変化による水分量の変化の可能性を取り除くために、堅固な構造を持った多孔質体である砂岩を使ってヒステリシスの実験を行ったが、データはまだ得られていないと書いている。実験に対する Richards の姿勢が、非常に緻密である事を示す記述である。さらに、前述の毛管伝導度の実験で得られた粘土に対するデータを参照して、 ϕ と K の関係にもヒステリシスがある事を述べている。しかし、 ϕ と K の関係に対するヒステリシスの影響は大きくないと結論づけた。このように実際の土壌を使って ϕ と θ さらに ϕ と K の関係にヒステリシスの影響があることを明らかにしたのは Richards が初めてである (Philip, 1974)。

3. おわりに

土壌物理の基礎を築いた偉大な科学者の一人である

Richards の論文の中でも、彼を最も有名にした “Capillary conduction of liquids through porous mediums” を解説した。今日では、水分フラックスを表す式を連続の式に導入することは、理論的に考えれば当然の帰結の様に思える。しかし、現実には Buckingham の不飽和水分フラックスから 25 年近く時間を経てようやくとり着いた方程式である。この Richards 式を解くためには、更に 20 年の歳月を要している。不飽和多孔質体中の水分移動に対して今日では多くのアプリケーションプログラムが開発されている。現実ではよく見られる現象である非常に乾いた砂への水分浸潤問題は、数値計算で解こうとすると現在でも相当な困難を伴うのが実状である。この点についても、先に紹介した Celia *et al.* (1990) の先駆的な論文が評価され、同氏は 2005 年の AGU (アメリカ地球物理学連合) 水文学会賞を受賞した。それにも関わらず、水分、溶質、熱が互いに影響を与えながら多孔質体中を移動するごく普通の現象に対する安定した解法は開発されていない。いまだに残る様々な問題の解決に向けて、読者諸氏の奮闘を大いに期待したい。さらに、土壌中の水分移動方程式の提案ばかりが目立っている論文であるが、Richards は種々の新しい実験装置を開発して新しい知見を発表していることも忘れてはならない。新しい知見を得るためには、新しい実験装置の開発が必要である。前人未到の未知の分野に果敢に取り組む彼の姿勢は、大いに見習われるべきであろう。

謝 辞

執筆の機会を与您いただきました編集委員の取出伸夫博士に深謝します。

引用文献

- Campbell, G.S. (1985): Introduction to soil physics with BASIC. Elsevier Pub., New York.
- Celia, M.A., Bouloutas, E.T. and Zarba, R.L. (1990): A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resour. Res.*, **26**: 1483-1496.
- Klute, A. (1952): A numerical method for solving the flow equation for water in unsaturated materials. *Soil Sci.*, **73**: 105-116.
- Narasimhan, T.N. (2007): Central ideas of Buckingham (1907): century later. *Vadose Zone J.*, **6**: 687-693.
- Nimmo, J.R. and Landa, E.R. (2005): The soil physics contributions of Edgar Buckingham. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **69**: 328-342.

Or, D. (2001) : Who invented the tensiometer? Soil Sci. Soc. Am J., **65** : 1-3.

Philip, J.R. (1974) : Fifty years progress in soil physics. Geoderma, **12** : 265-280.

Richards, L.A. (1928) : The usefulness of capillary potential to soil moisture and plant investigation. J. Agric. Res., **37** : 719-742.

Richards, L.A. (1931) : Capillary conduction of liquids through porous mediums. Physics, **1** : 318-333.

Richards, L.A. (ed.) (1954) : Diagnosis and improvement of saline and alkali soils. Handbook 60. USDA, ARS.

受稿年月日 : 2008 年 4 月 14 日

受理年月日 : 2008 年 6 月 16 日