

土壤中の溶質移動解析への有限要素法の適用

西 村 直 正\*  
 五十崎 恒\*

Application of the Finite Element Method to the Analysis of  
 Solute Transport through soil

Naomasa NISHIMURA and Hisashi ISOZAKI

Faculty of Agriculture, Gifu University

1. はじめに

我が国では、特に干拓地などの塩類土壌や施設園芸などにおいて、塩類濃度過多による作物の生育障害が問題となってきた。このうち施設園芸においては、天然降雨が遮断されるのに加えて多肥集約的栽培が営まれるために、土壌表層に塩類が残留・集積しやすく、これに対処するために灌水除塩が頻繁に実施されている。

本研究では、このような土壌中の溶質移動現象を解明することを目的として、溶質移動を記述する一般の移流分散型の方程式の有限要素法による解を試み、本解析法の有効性を検討することにする。

一般に、このような数値解析においては、時間および空間における節点の間隔が、収束性や安定性といった解の精度を左右することになることはいうまでもない。しかしながら、ここで取り扱う移流分散型の方程式の場合には、これらの影響は移流項による因子と拡散分散項による因子の2つに区別して考えることができる。そこで本研究では、移流項あるいは拡散分散項のどちらかを無視した特殊な条件下におけるシミュレーションをそれぞれ個別に行なうことにより適当な節点間隔を決定した上で、両方の項を考慮した一般の場合をシミュレートするという方法を採用することにする。

溶質の吸着速度が溶質の移動速度に対して十分大きいと仮定できる場合には、Sink-Sourceのない一次元における土壌中の溶質移動は、平衡等温吸着式を用いた次式の移流分散型の方程式で記述されてきた<sup>1)</sup>。

$$\frac{\partial (\rho_s Q + \theta c)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (-qc + D_s \frac{\partial c}{\partial x}) \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $\rho_s$ は乾燥密度 ( $g/cm^3$ )、 $Q$ は単位重量当りの乾燥土壌に対する溶質の平衡吸着量 ( $\mu g/g$ )、 $\theta$ は体積含水率 ( $cm^3/cm^3$ )、 $c$ は土壌間隙中の溶液濃度 ( $\mu g/cm^3$ )、 $q$ は土壌水フラックス ( $cm^3/cm^2/sec$ )、 $D_s$ は拡散分散係数 ( $cm^2/cm/sec$ )、 $t$ は時間 ( $sec$ )、 $x$ は距離 ( $cm$ )である。上式を、有限の空間領域 ( $0 \leq x \leq L$ )における  $N$  個の線形の基底関数  $\phi_i (i=1, 2, \dots, N)$ を用いて Galerkin 法により離散化し、部分積分を行うと次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} (-\phi_j q + D_s \frac{d\phi_j}{dx}) dx c_j \\ & + \sum_{j=1}^N \int_0^L (\rho_s \frac{dQ}{dc} + \theta) \phi_i \phi_j dx \frac{dc_j}{dt} \\ & = -[\phi_i J_c]_0^L \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 $J_c$ は溶質のフラックスで、

$$J_c = qc - D_s \frac{\partial c}{\partial x} \dots \dots \dots (3)$$

2. 移流分散型方程式の有限要素法による解法

(1) 空間の離散化

土壌中の不動水領域を無視でき、しかも土粒子による

\*岐阜大学農学部

である。(2)式を行列表示すると、

$$[A] \{C\} + [B] \{dC/dt\} = \{F\} \quad (4)$$

であり、 $[A]$ 、 $[B]$ 、 $\{F\}$ 、 $\{C\}$ 、 $\{dC/dt\}$  はそれぞれ

$$[A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & & & & & & 0 \\ -q_1 & -q_1+q_2 & q_2 & & & & & \\ & -q_2 & -q_2+q_3 & q_3 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & -q_{N-2} & -q_{N-2}+q_{N-1} & q_{N-1} & & & \\ & & & -q_{N-1} & q_{N-1} & & & \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} a_1 & -a_1 & & & & & & 0 \\ -a_1 & a_1+a_2 & -a_2 & & & & & \\ & -a_2 & a_2+a_3 & -a_3 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & -a_{N-2} & a_{N-2}+a_{N-1} & -a_{N-1} & & & \\ & & & -a_{N-1} & a_{N-1} & & & \end{bmatrix}$$

..... (5)

$$[B] = \begin{bmatrix} 2b_1 & b_1 & & & & & & 0 \\ b_2 & 2(b_1+b_2) & & & & & & \\ & b_2 & 2(b_2+b_3) & b_3 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & b_{N-2} & 2(b_{N-2}+b_{N-1}) & b_{N-1} & & & \\ & & & b_{N-1} & 2b_{N-1} & & & \end{bmatrix}$$

..... (6)

$$\{F\} = \begin{bmatrix} J_{c1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ J_{cN} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\{C\} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\{dC/dt\} = \begin{bmatrix} dc_1/dt \\ dc_2/dt \\ dc_3/dt \\ \vdots \\ dc_N/dt \end{bmatrix} \quad (9)$$

である。但し、 $k(=1, 2, \dots, N-1)$ を要素番号とする

$$a_k = D_{sk} / \Delta x_k \quad (10)$$

$$b_k = (\rho_s dQ/dc + \theta)_k \cdot \Delta x_k / 6 \quad (11)$$

であり、 $q_k$ 、 $D_{sk}$ 、 $(\rho_s dQ/dc + \theta)_k$ はそれぞれ要素の中点における値で代表するものとする。また $\Delta x_k$ は要素の長さであり、 $J_{c1}$ 、 $J_{cN}$ はそれぞれ節点1とNにおける溶質のフラックスである。

(2) 境界条件の変換

(4)式は Neumann 型の境界条件、即ち溶質のフラックスが一定という境界条件の問題に適用可能となる。しかしながら一般には、土壌が濃度一定の溶液に接しているなどの場合の方がはるかに現実的であるため、さらにこれを Dirichlet 型の境界条件にも対応できるようにするために、以下のような変換が必要となる。

今、 $x = 0$ における濃度  $c_1$  が時間によらず一定であるとすると、(4)式は次の様に既知の部分と未知の部分に分解できる。

$$1 \left\{ \begin{matrix} \overbrace{A_{11} \ A_{12}}^{1 \ N-1} \\ \overbrace{A_{21} \ A_{22}}^{N-1} \end{matrix} \right\} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} + 1 \left\{ \begin{matrix} \overbrace{B_{11} \ B_{12}}^{1 \ N-1} \\ \overbrace{B_{21} \ B_{22}}^{N-1} \end{matrix} \right\} \begin{Bmatrix} dC_1/dt \\ dC_2/dt \end{Bmatrix} = 1 \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

このとき、 $dc_1/dt = 0$ であるから、上式の未知部分については、

$$[A_{22}] \{C_2\} + [B_{22}] \{dC_2/dt\} = \{F_2\} - c_1 [A_{21}] \quad (13)$$

のように表現できることになる。これを改めて(4)式の形で記述するものとするれば、右辺の定数ベクトル $\{F\}$ には  $J_{c1}$  という Neumann 条件の代わりに  $c_1$  という Dirichlet 条件が取り込まれたことがわかる。さらに、

$x = L$ における濃度  $c_N$ が一定の場合にも，同様の交換を考えることができる。

(3) 予測子-修正子法による直接積分法

(4)式を差分化するには，次の2つの形式がよく用いられる。

$$[A]^m [\varepsilon \{C\}^{m+1} + (1-\varepsilon) \{C\}^m] + [B]^m [\{C\}^{m+1} - \{C\}^m] / \Delta t = \{F\}^m \dots\dots\dots (14)$$

$$\varepsilon [A]^{m+1} \{C\}^{m+1} + (1-\varepsilon) [A]^m \{C\}^m + [B]^{m+\nu} [\{C\}^{m+1} - \{C\}^m] / \Delta t = \varepsilon \{F\}^{m+1} + (1-\varepsilon) \{F\}^m \dots\dots\dots (15)$$

これらの式においては， $\varepsilon = 1$ は前方差分， $\varepsilon = 0$ は後方差分， $\varepsilon = 0.5$ は Crank-Nicolson 法の場合に相当する。また， $m$ は時間方向における節点番号， $\Delta t$ は時間間隔である。それぞれの式において，未知部分と既知部分とに分離して整理すれば，

$$(\varepsilon [A]^m + [B]^m / \Delta t) \{C\}^{m+1} = [(\varepsilon - 1) [A]^m + [B]^m / \Delta t] \{C\}^m + \{F\}^m \dots\dots\dots (16)$$

$$(\varepsilon [A]^{m+1} + [B]^{m+\nu} / \Delta t) \{C\}^{m+1} = [(\varepsilon - 1) [A]^m + [B]^{m+\nu} / \Delta t] \{C\}^m + \varepsilon \{F\}^m + (1-\varepsilon) \{F\}^{m+1} \dots\dots\dots (17)$$

となる。ここで， $[B]^{m+\nu}$ は  $\{C\}^{m+\nu} = \varepsilon \{C\}^{m+1} + (1-\varepsilon) \{C\}^m$ に対応する値だとすると，(16)式と(17)をそれぞれ予測子と修正子として次のように直接積分することができる。

(i) まず， $\{C\}^m$ の値を用いて  $[A]^m$ ， $[B]^m$ ， $\{F\}^m$ を計算し，(16)式の予測子を用いて  $\Delta t$  時間後の  $\{C\}^{m+1}$ を予測する。

(ii)  $\{C\}^m$ と予想した  $\{C\}^{m+1}$ を用いて  $[A]^{m+1}$ ， $[B]^{m+\nu}$ ， $\{F\}^{m+1}$ を計算し，(17)式の修正子を用いて  $\{C\}^{m+1}$ の値を修正する。

(iii) 修正した  $\{C\}^{m+1}$ を用いてさらに修正子にかけ， $\{C\}^{m+1}$ の値が満足いく程度まで収束したら，次の時間ステップに進む。

以下では，本解析法の有効性を検討するために  $\theta$ と  $q$ が位置と時間にかかわらず，一定と単純化して計算を行ったが，その場合には修正子はほぼ，1，2回で収束した。

なお，水の流れが非定常の場合には，あらかじめ何らかの方法により土壌水の移動をシミュレートして各時間ステップにおける  $\theta$ と  $q$ を求めておきさえすれば，それに伴う溶質移動を，本解析法により逐次計算することができる。

3. 数値解の精度に影響を及ぼす因子

(1) 拡散分散項が無い場合の解の精度

さて，拡散分散項が無く，位置と時間にかかわらず  $\theta$ と  $q$ が一定の溶質移動をシミュレートする場合， $\Delta x$ と  $\Delta t$ の間隔をそれぞれ同一にとるならば，(14)式の予測子は次のように無次元化できる。

$$\mathcal{Z} [A_{c1}] [\varepsilon \{C_r\}^{m+1} + (1-\varepsilon) \{C_r\}^m] + [B_n] [\{C_r\}^{m+1} - \{C_r\}^m] = \mathcal{Z} \{F_{c1}\} \dots\dots\dots (18)$$

ここで， $[A_{c1}]$ ， $\{F_{c1}\}$ はそれぞれ一定の行列とベクトルであり，

$$[A_{c1}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & -1 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

$$\{F_{c1}\} = \begin{Bmatrix} -c_b/c_o \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_i/c_o \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

となる。また， $\{C_r\} = \{C\} / c_o \dots\dots\dots (21)$

$$[B_n] = [B] / (\Delta x \cdot \theta) \dots\dots\dots (22)$$

$$\mathcal{Z} = q \cdot \Delta t / (\Delta x \cdot \theta) \dots\dots\dots (23)$$

である。修正子についても同様の変換が可能である。このように  $\Delta x$ と  $\Delta t$ は，すべて変数  $\mathcal{Z}$ の中に含まれるため，この場合の解の精度を左右するのは  $\varepsilon$ と  $\mathcal{Z}$ のみであることがわかる。

(2) 移流項が無い場合の解の精度

一方，移流項が無く，位置と時間にかかわらず  $\theta$ と

q が一定の溶質移動をシミュレートする場合、(14)式の予測子は次のように無次元化できる。

$$\mathcal{D}[A_{c2}][\varepsilon\{C_r\}^{m+1} + (1-\varepsilon)\{C_r\}^m] + [B_n][\{C_r\}^{m+1} - \{C_r\}^m] = \mathcal{D}\{F_{c2}\} \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 $[A_{c2}]$ 、 $\{F_{c2}\}$  はそれぞれ一定の行列とベクトルであり、

$$[A_{c2}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & -1 & 1 & & \end{bmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

$$\{F_{c2}\} = \begin{Bmatrix} (c_b - c)/c_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ (c_i - c_{N-1})/c_0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

となる。また、

$$\mathcal{D} = D_s \Delta t / [\theta (\Delta x)^2] \dots\dots\dots (27)$$

である。修正子についても同様の変換が可能であるため、この場合の解の精度を決定するのは  $\varepsilon$  と  $\mathcal{D}$  の2つの因子であることがわかる。

このような定常状態で土壌水の流動が生じている場合には、溶質移動に対する数値解の精度に影響を及ぼすものは、 $\varepsilon$  の他に節点間隔  $\Delta x$  と  $\Delta t$  が考えられるが、このうち  $\Delta x$  と  $\Delta t$  については  $\mathcal{Z}$  の因子と  $\mathcal{D}$  の因子の2つに整理することができる。したがって数値計算を行う際には、特に  $\mathcal{Z}$  と  $\mathcal{D}$  をどのような範囲に設定するかを十分検討しておく必要がある。そこで以下では、拡散分散項あるいは移流項を無視した条件下において実際にシミュレートした結果を解析解あるいは準解析解と比較することにより、 $\mathcal{Z}$  と  $\mathcal{D}$  の満たすべき値の範囲を推定していくことにする。

4. 計算条件

ここでは平衡吸着量  $Q$  は、Freundlich の等温平衡吸着式により  $c$  の関数として

$$Q(c) = Q(c/c_0)^\alpha \dots\dots\dots (28)$$

により表現されるものとし、一方溶質の拡散係数と分散係数はそれぞれ含水率  $\theta$  と間隙中の流速  $v (= q/\theta)$  の関数であるとして提案された次式を、拡散分散係数として用いた。

$$D_s(\theta, v) = D_0 \theta \tau^2 + \beta |v| \dots\dots\dots (29)$$

但し、 $Q_0 = 100 (\mu g/g)$ 、 $C_0 = 100 (\mu g/cm^3)$ 、 $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 2.5 (cm)$ 、Fick の拡散係数である  $D_0$  は  $10^{-5} (cm^2/sec)$ 、屈曲度  $\tau$  は 0.65 とした。また、土壌の体積含水率、乾燥密度、土壌水フラックスとしては  $\theta = 0.4 (cm^3/cm^3)$ 、 $\rho_s = 1.5 (g/cm^3)$ 、 $q = 0.01 (cm/sec)$  の値を採用した。

以上の仮定のもとで、次のような4つの計算条件を設定した。

- (i) 拡散分散の効果を無視した場合の、移流効果のみによる溶質のリーチング。
- (ii) 拡散分散の効果を無視した場合の、移流効果のみによる溶質の浸入。
- (iii) 土中水フラックスの生じていない場合の、拡散効果のみによる溶質の浸入。
- (iv) 拡散分散効果と移流効果をとともに考慮した場合の、溶質の浸入。

但し、溶質の浸入の場合には初期条件  $c_i = c_0/10$ 、上流端の境界条件  $c_b = c_0$  とし、リーチングの場合には、初期条件  $c_i = c_0$ 、上流端の境界条件  $c_b/10$  とした。

これらの計算条件の内、(i) と (ii) は  $\mathcal{Z}$  の決定のために、また、(iii) は  $\mathcal{D}$  の決定のために設定したものである。さらに (iv) は、 $\mathcal{Z}$  と  $\mathcal{D}$  の値から逆算される  $\Delta x$  と  $\Delta t$  の値を用いた場合に、はたして解が精度よく得られるかを検討するために設定した条件である。

5. 解析解または準解析解と数値解との比較

- (1) 拡散分散効果を無視した場合の溶質のリーチング  
 (1)式において  $\theta$  と  $q$  が一定で  $D_s = 0$  の場合、 $c$  を独立変数に、 $x$  を従属変数に変換すると  $\partial x/\partial t = q/(\rho_s dQ/dc + Q)$  となる。従って、この場合の浸入前線の位置  $x(t, c)$  は、次式の特異曲線により与えられる。

$$x/V = 1/\{(\rho_s/\theta)dQ/dc + 1\} = 1/(18.75/\sqrt{c} + 1) \dots\dots\dots (30)$$

但し、 $c_b \leq c \leq c_i$  である。また、

$$V = q \cdot t/\theta = v \cdot t \dots\dots\dots (31)$$

であり、これは  $t$  時間に土壤中に浸入した水の、平均到達距離に相当する。

さて、3章で述べたようにこの条件下における数値解の精度を左右するのは  $\varepsilon$  と  $\mathcal{Q}$  である。Fig. 1 は、拡散分散効果を無視した場合の溶質のリーチングにおける解析解と数値解とを、各々の  $\varepsilon$  と  $\mathcal{Q}$  について比較した結果である。この場合は、 $\varepsilon$  を 0.5 に近付けるほど、また、 $\mathcal{Q}$  を小さくするほど、より正確な解が求まっているのが分かる。しかしながら、前線の形状が比較的大きく変化する  $c/c_0=1$  の付近では、精度が落ちてしまっている。このような誤差は、次に示す溶質の浸入の場合に、より大きくなる。

(2) 拡散分散効果を無視した場合の溶質の浸入

4章で  $\alpha=0.5$  を仮定したように一般に平衡吸着式  $Q(c)$  は上に凸な曲線で表現されることが多い。そのため  $\theta$  と  $q$  が一定で  $D_s=0$  の条件下での溶質の浸入では後方の特性曲線が前方の特性曲線を追い越す形となり、その結果この場合の解は、ピストンライクに溶質の浸入前線が進行する衝撃波としての取扱いが可能になる<sup>2)</sup>。従って、物質保存条件から次式が得られる。

$$x/V = (c_b - c_i) / \left\{ \rho_s [Q(c_b) - Q(c_i)] / \theta + (c_b - c_i) \right\} = 0.260 (c_i \leq c \leq c_b) \dots\dots (32)$$

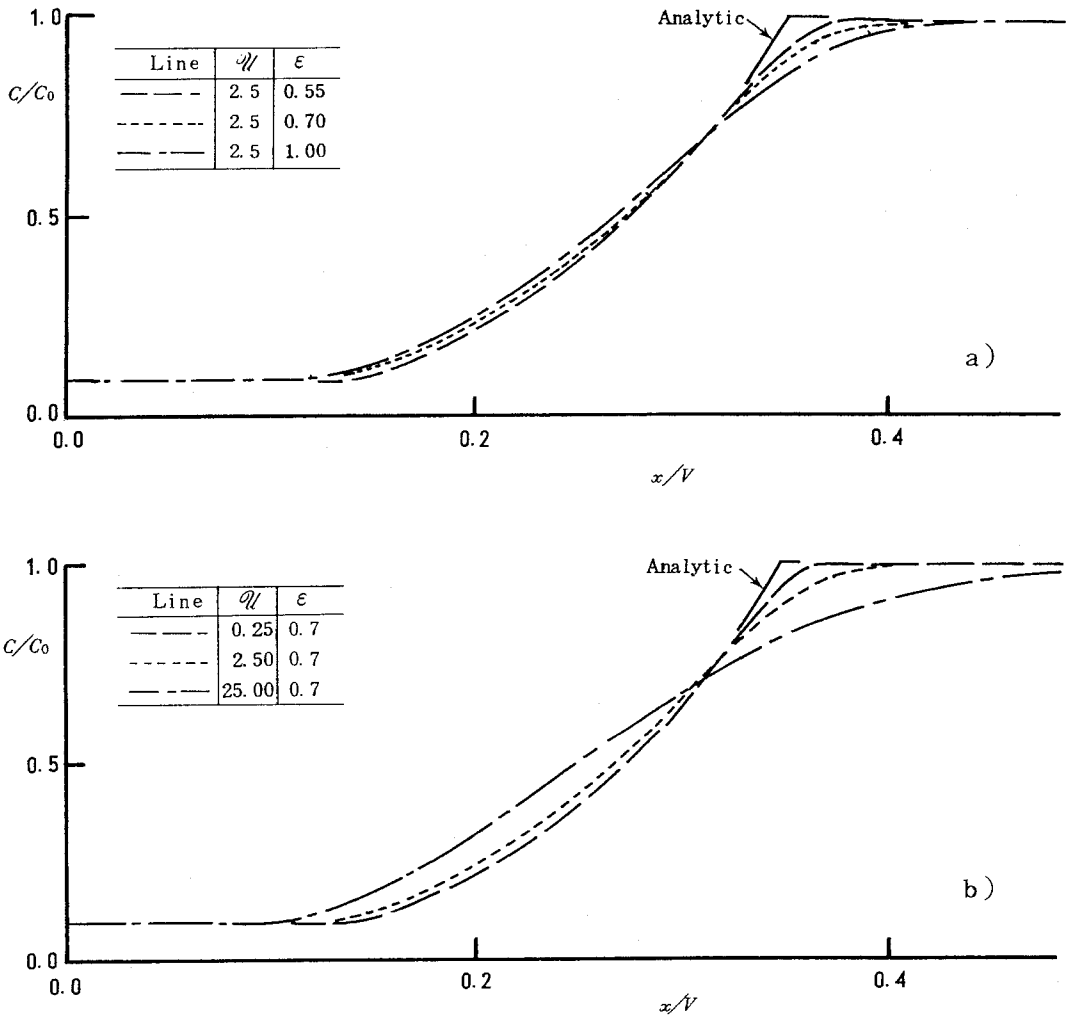


Fig. 1 Effects of a)  $\varepsilon$  and b)  $\mathcal{Q}$  on the propagation of a concentration front. ( after  $250/\mathcal{Q}$  time steps ).

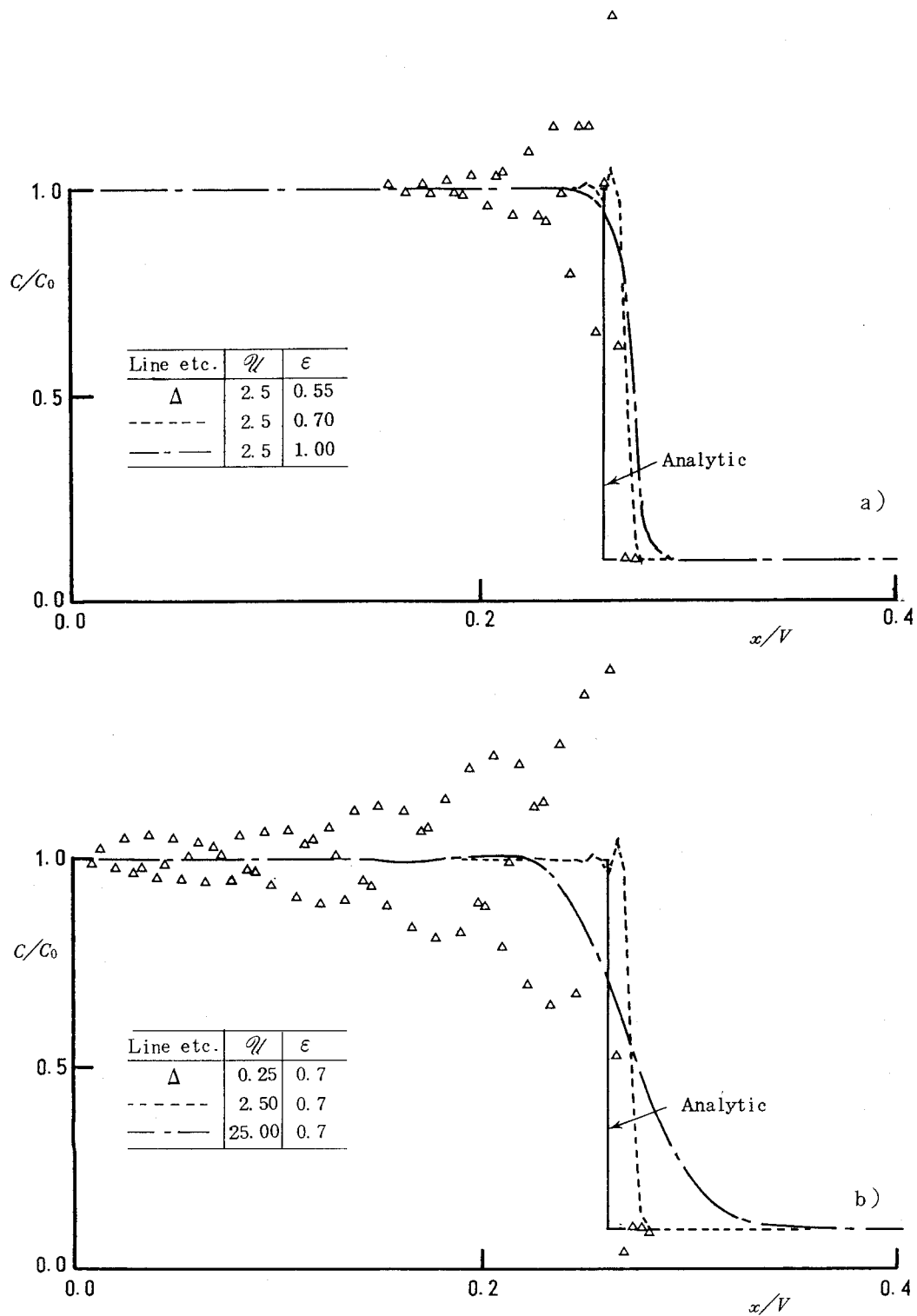


Fig. 2 Effects of a)  $\epsilon$  and b)  $\eta$  on the propagation of a concentration front. (after  $250/\eta$  time steps)

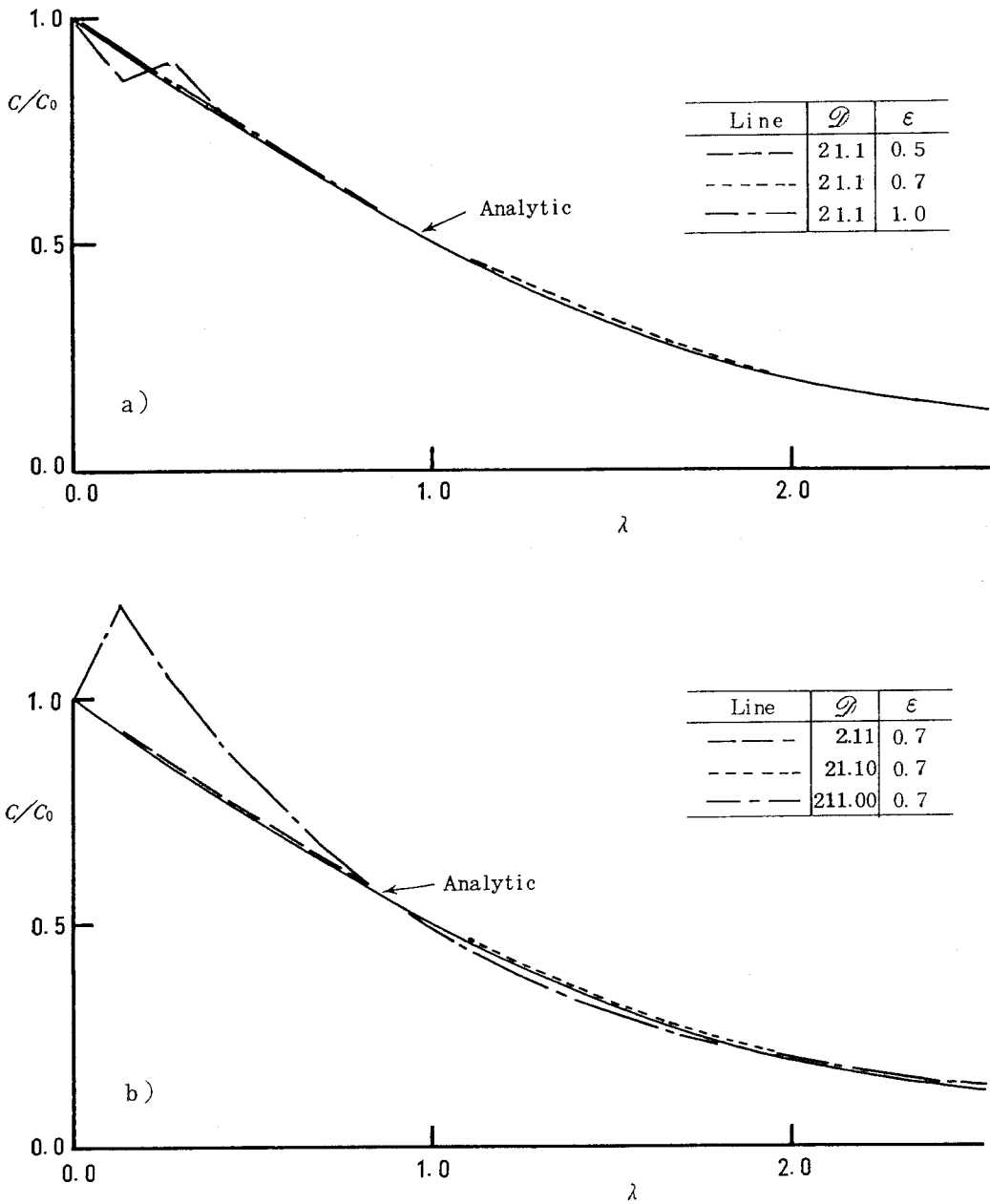


Fig. 3 Effects of a)  $\epsilon$  and b)  $\mathcal{D}$  on the propagation of a concentration front. (after  $211/\mathcal{D}$  time steps)

したがってもしも、土壌による溶質の吸着が無ければ、 $Q(c_s) = Q(c_i) = 0$ より  $x = V$  となり、溶質の浸入前線の位置と浸入水の平均到達距離は一致する。

Fig. 2に、拡散分散効果を見捨てた場合の溶質の浸入における解析解と数値解とを各々の  $\varepsilon$  と  $\mathcal{Z}$  について比較した。解析解は、 $x/V = 0.260$  でステップ状に変化するため、これを数値解で正確に求めることは困難であった。 $\varepsilon = 0.55$  では前線後方で解が振動し、 $\varepsilon = 1.0$  では振動は緩和されるものの、前方差分近似のために前線位置が実際よりも前方に伸びてしまう。したがって  $\varepsilon$  については 0.7 程度が適当であると考えられる。一方、 $\mathcal{Z}$  の値についても、 $\mathcal{Z} = 0.25$  では振動、 $\mathcal{Z} = 25.0$  では前線形状がなだらかとなる傾向があるため、 $\mathcal{Z} = 2.5$  程度が最適であると推定される。

このように、拡散分散項を見捨てた場合の溶質の移動においては、単に  $\mathcal{Z}$  を小さくすれば数値解の精度も上がるというわけではなく、 $\mathcal{Z} = 2.5$  前後といったある値の範囲に設定する必要のあることが分かった。

(3) 土壌水フラックスの生じていない場合の、拡散効果のみによる溶質の浸入。

次に、移流効果の無い場合の溶質の浸入について考えてみることにする。この場合は、土壌水のフラックスは生じていないとするのであるから分散効果も生じず、溶質は拡散効果のみによって移動することになる。このとき、Boltzmann 変換によって次式の連立常微分方程式が得られる。

$$\frac{dA}{dc} = \left( \frac{\rho_s}{\theta} \frac{dQ}{dc} + 1 \right) \lambda \quad \dots \dots \dots (33)$$

$$\frac{d\lambda}{dc} = -\frac{2}{A} \quad \dots \dots \dots (34)$$

上式は、Runge-Kutta 法等により数値計算が可能であり、その結果、次式の Boltzmann 変数、

$$\lambda = x \sqrt{\theta / (D_s t)} \quad \dots \dots \dots (35)$$

を濃度  $c$  の関数として求めることができる。

Fig. 3に、Runge-Kutta 法による準解析解と、 $\varepsilon$  及び  $\mathcal{Z}$  を変えた場合の数値解と比較して示す。この場合は、 $\varepsilon$  は 0.7 程度よりも大で、 $\mathcal{Z}$  は 21.1 程度よりも小で、準解析解と非常によく一致した。

(4) 拡散分散効果と移流効果とともに考慮した場合の、溶質の浸入。

最後に、移流項と拡散分散項の両効果による一般の溶質移動の場合について検討する。

土壌水フラックスと含水率がともに一定の場合、浸入初期における(1)式の解は摂動法を用いて次式のような級数展開が可能となる。

$$x(c, t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(c) t^{-i/2} \quad \dots \dots \dots (36)$$

このとき  $g_1$  と  $g_2$  については、次式の連立常微分方程式の解として得られる。

$$\frac{dG_1}{dc} = \left( \frac{\rho_s}{\theta} \frac{dQ}{dc} + 1 \right) g_1 \quad \dots \dots \dots (37)$$

$$\frac{dg_1}{dc} = -\frac{2D_s}{\theta G_1} \quad \dots \dots \dots (38)$$

$$\frac{dG_2}{dc} = \left( \frac{\rho_s}{\theta} \frac{dQ}{dc} + 1 \right) g_2 \quad \dots \dots \dots (39)$$

$$\frac{dg_2}{dc} = -\frac{G_2 + v(c_i - c)}{(D_s/\theta)(dc/g_1)^2} \quad \dots \dots \dots (40)$$

Fig. 4に  $g_1$  と  $g_2$  の2項についての計算結果をFig. 5に、この2項のみで濃度前線を近似した結果を、実線で示す。

さて、拡散分散項と移流項とともに考慮した計算条件下では、数値シミュレーションの精度には、 $\varepsilon$  のほかに  $\mathcal{Z}$  と  $\mathcal{Q}$  が関係しているものと考えられる。 $\varepsilon$  の値としてはこれまでの考察から 0.7 程度にしておけば適当であろう。一方、 $\mathcal{Z}$  は 2.5 前後、 $\mathcal{Q}$  は 21.1 程度以下であるとすれば、次式

$$\log \Delta t = \log(2.5\theta/\Delta q) + \log \Delta x \\ = 2 + \log \Delta x \quad \dots \dots \dots (41)$$

$$\log \Delta t \leq \log(21.1\theta/D_s) + 2 \log \Delta x \\ = 2.13 + 2 \log \Delta x \quad \dots \dots \dots (42)$$

より  $\Delta t$  と  $\Delta x$  の値はFig. 6の斜線内にあればほぼ適当であろうと考えられる。ここでは、浸入の初期における準解析解と比較するため、 $\Delta t = 100$ sec、 $\Delta x = 1.0$  cm (Fig. 6に点で示す) をとり、計算を行った。その結果をFig. 5に破線で示す。この場合、時間ステップ1回目(即ち、 $t = 100$ sec)と2回目( $t = 200$ sec)の  $x = 1.0$  における値が若干の振動傾向を示す他は、まずまずの結果が得られた。

次に、さらに改良のため、 $x = 0$  付近で  $\Delta x$  を小さく、また、 $0 < t < 100$  で  $\Delta t = 10$ sec、 $100 < t$  では  $\Delta t = 100$ sec、として計算を行った結果をFig. 5に点線で示す。この場合も、時間ステップ1回目で  $x = 0$  付近の値が振動したが、その後は急速に緩和されて、 $t = 100$ sec以降では良好な結果が得られた。



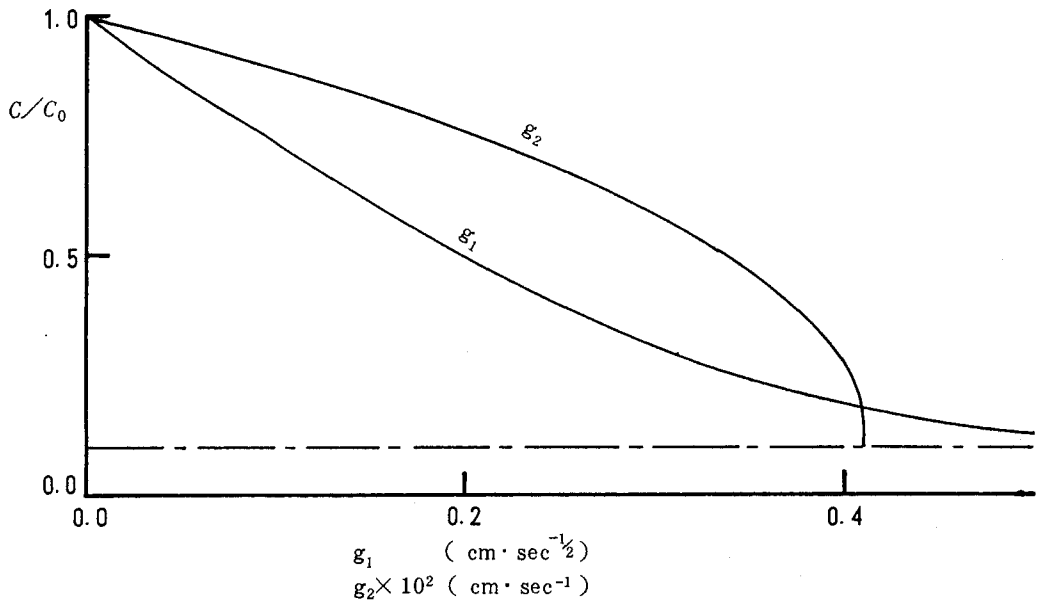
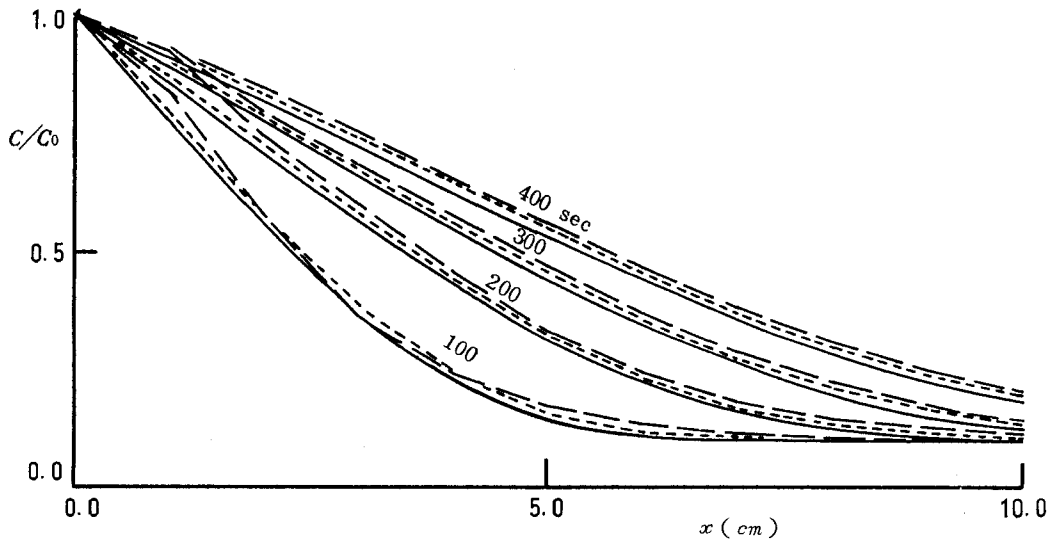
Fig. 4 Functions of  $g_1$  and  $g_2$ 

Fig. 5 Comparisons between finite element method (--- and ..... ) and perturbation method (———).

## 6. 結 論

土壌中の溶質移動現象を解析するために、空間に対しては有限要素法により離散化し、時間に対しては差分法を用いて表現した予測子と修正子によって、直接積分するという方法によりシミュレーションを行ない、その適合性を検討した。その際、時間と空間の離散点の取り方に工夫が必要となるが、ここでは移流項と拡散分散項を別個に取り扱うことによりこれを推定する方法を示した。また、それにより推定した離散点間隔を用いてシミュレートした結果はほぼ満足のいくものであり、本解析法の有効性が確認された。

## 引用文献

- 1) Hillel, D. : "Fundamentals of Soil Physics", Academic Press, New York, 1980.
- 2) 富士岡義一監訳 : "コリンズ浸透理論", 畑地農業振興会, 128-134, 1947
- 3) Phillip, J. R. : The Theory of Infiltration 1, Soil Sci. (83), 345-357, 1957

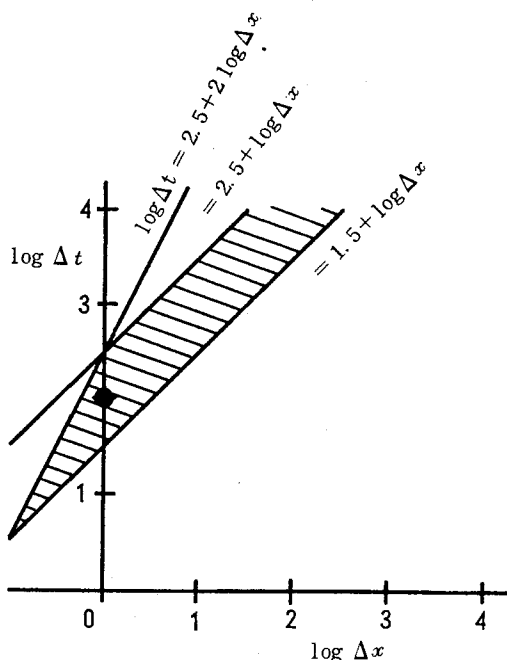


Fig. 6  $\Delta t, \Delta x$  の最適範囲.

## Summary

Solute transport through soil was simulated using the finite element method for the discretization of the space domain and the predictor-corrector method for immediate integration in the time direction.

The accuracy of numerical calculations in this case generally depends upon the distance between the nodal points for space and time. However, in case of a general convective-dispersive equation, these effects on the results can be estimated by separating the convective and diffusive-dispersive factors. Thus, the intervals between the nodal points were determined by comparing analytical or semi-analytical solutions with the numerical results obtained on the assumption that either convection or diffusion-dispersion did not occur.

The results of the simulation considering both terms were satisfactory enough to agree with the semi-analytical solution calculated by the perturbation method. The results also showed that the accuracy of the solution could be improved if the nodal points were better designed.