

ク ー ロ ン の 摩 擦 法 則 に つ い て

林 尚 孝*

I. ま え が き

土壌の挙動を、粉粒体をモデルとして解明しようとする考え方が¹⁾ある。粉粒体を土壌のモデルとすること自体は問題がなく、複雑な土壌の挙動を明らかにするためのひとつの重要な手段と考えられる。しかし、肝心の粉粒体の挙動が力学的に解明されているのかというと、かならずしもそうではない。学会誌の埋草に「粉体魔物説」という随想さえ見られる現状である²⁾。

粉粒体の物性についてみると、気体や液体において確立されているような指標が皆無に近い。粉粒体の個々の粒子についての、粒形、粒の大きさ、比重などの概念は容易に理解できる（一次物性）。しかし、粒子の集団としての粉粒体の挙動は、一次物性からは類推できない。たとえば粉体の二次物性を示す指標のひとつとして、嵩密度が用いられる。同一の粉体を用いても、一次物性から嵩密度は類推できないし、つめ方によってもそれは大きく変化する。

筆者は、肥料・農薬・穀粒などの粉粒体の流動性について関心をもってきた。粉粒体の流動性についての指標にも適当なものがなかった。そのため、土質力学で用いられていた息角の概念が代用され、古くから粉粒体の二次物性を示す代表的な指標とされてきた。ところが、Train³⁾により息角の寸法効果が指摘されると、息角そのものが指標として適当かどうか疑問となった。筆者は、息角の示す複雑な挙動そのものが粉体物性の複雑さの反映と考え、息角の挙動の解明にとりこんできた結果、一応の結論をえた⁴⁾。

ここでは、息角の研究の過程であきらかにされた低圧領域における摩擦法則の特異性について述べることにする。土のせん断抵抗において用いられるクーロンの式は、固体間摩擦に用いられているクーロンの法則と違った形で表わされる。クーロンの式とよばれるふたつの式についての関係を以下にとりあげた。

II. ふ た つ の ク ー ロ ン の 式

1. 固体表面の摩擦

固体間の摩擦については、経験則としてクーロンの法

則が有名である。この法則を簡条書きにすれば、つぎのようになる⁵⁾。

(1) 摩擦力は摩擦面に働く垂直力に比例し、見かけの接触面積の大小には関係しない。

(2) 摩擦力（動摩擦力）はすべりの速度の大小には関係しない。

(3) 静摩擦力は動摩擦力よりも大きい。

この三つの実験法則は、18世紀の実験物理学者・工学者のクーロン⁶⁾の名をとってクーロンの法則、またはそれより百年前に同様な法則を確認したアモントン⁷⁾の名をとりアモントンの法則、あるいはアモントン・クーロンの法則とよばれている。摩擦力を F 、垂直力を P 、摩擦係数を μ とすれば、次式が成立する。（ μ は定数）

$$F = \mu P \quad (1)$$

固体間の摩擦についてのべられているクーロンの法則を、以後アモントンの法則とよび、(1)式をアモントンの式とよぶことにする。アモントンの式は、著しい高荷重、低荷重においては成立しないといわれ、低荷重領域では(3)式に従うといわれる⁸⁾。

2. 土質力学でのクーロンの式

土質力学では、垂直応力 σ とせん断応力 τ との関係を示す次式を、クーロンの式とよんでいる。

$$\tau = \sigma \tan \phi + c \quad (2)$$

ここで、 ϕ は内部摩擦角、 c は粘着力を示し、いずれも定数と考えられている。チェボタリオフ⁹⁾は粘着力のない砂のような粉粒体では、 $c=0$ だから、内部摩擦角 ϕ と息角 α_R は等しいとしている。

(2)式は応力の形で書かれているので、書きかえると(3)式がえられる。

$$F = \mu_1 P + C \quad (3)$$

(3)式は(1)式と同じくクーロンの式とよばれている。曾田は、粘着力 C の意義を確立した点では、(3)式はクーロンよりピンチ (S. Vince) の名を冠すべきであるとしている⁶⁾。混乱をさけるため、曾田の指摘に従い、以後(3)式をピンチの式とよぶことにする。

3. クーロンの式をめぐる混乱

クーロンの式とよばれる二つの式を、アモントンの式とピンチの式に区別してよぶことにした。クーロン自身の示した実験式はピンチの式の形であった。クーロン以

* 茨城大学農学部 (1972.9.7受理)

後の多くの研究成果により、固体摩擦についてはアモントンの式を指してクーロンの法則としている。このため、アモントンの式もピンチの式もともにクーロンの式とよばれ、すくなく混同がおこっている。ピンチの式で $C=0$ のばあいはアモントンの式になる。付着力がない粉粒体ではアモントンの式が成立することになる。

アモントンの式とピンチの式について検討してみる。ピンチの式の μ_1 とアモントンの式の μ の間には次式が成立する。

$$\mu = \mu_1 + C/P \quad (4)$$

アモントンの式では μ を一定と考えているのに対し、ピンチの式では μ_1 を一定と考えている。(4)式から P が C にくらべてきわめて小さいときには μ は非常に大きくなり、 P が増加するにつれ μ は μ_1 に近づくことになる。すなわち低荷重領域では粘着力 C の影響を重視しなければならない。

粉体現象（たとえば息角）について、ピンチの式とアモントンの式のいずれを適用すればよいのだろうか。息角について、チェボタリオフやテルツァギ・ベックは、付着力のないばあいにはアモントンの式を用いている。

以上のようにアモントンの式とピンチの式をどのようにに区別するのか、成立の範囲はどうか、粘着力・付着力 C をどう考えるべきかという問題はこれまで明確にされていなかった。

III. ガラス平面間の静摩擦実験

1. はじめに

低圧領域における摩擦現象を、ばらつきを伴う表面の

破壊現象と考え、そこでの法則性を明らかにすることを目的とした。アモントンの式あるいはピンチの式にとらわれずに確率論の立場から実験を行なった。この実験は、つぎのような特徴をもつ。

(1) 見かけの圧力範囲は、約 $0.04 \sim 241 \text{g/cm}^2$ である。クーロンのおこなった実験 ($0.08 \sim 50 \text{kg/cm}^2$) より低い圧力領域を含んでいる。

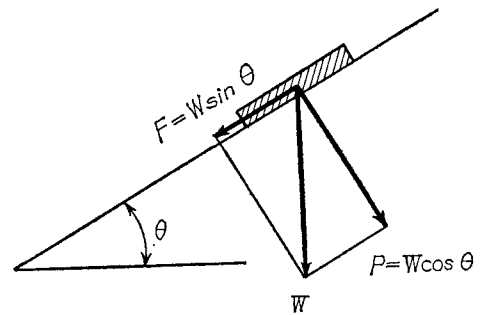
(2) 摩擦の影響を除くため、1回ごとに新しい摩擦面を用いた。

(3) 実験ではばらつきの分布を重視し、平均値だけでなく統計的な取扱いをした。

2. 実験材料および方法

(1) 実験材料 一定の平面性をもつとみられる光学顕微鏡用カバーガラス1号 ($18 \times 18 \times 0.15 \text{mm}$, 約 0.12g) をスライダとし、スライドガラス1号を台とした。

(2) 圧力範囲 底面に薄いゴムをはった鋼製円柱を荷重として用いた。スライダ重量は、当初7種類とし、追実験でさらに3種類を比較した。(表1)スライダ面



図一1 傾斜法による静摩擦係数の測定

表一1 ガラスの静摩擦係数の荷重特性

スライダ重量 W (g)	標 本 数 N_s (回)	平均静摩擦係数 $\bar{\mu}_s$	標 準 偏 差 s	極 値		t 分布による $\bar{\mu}_s$ の 95% 信頼区間
				最 小 値	最 大 値	
0.12	41	0.543	0.1763	0.294	1.139	0.599~0.488
2.92	37	0.387	0.0844	0.272	0.633	0.415~0.359
6.02	42	0.358	0.0882	0.254	0.688	0.385~0.330
11.82	29	0.362	0.0668	0.230	0.530	0.388~0.337
25.82	38	0.361	0.0659	0.239	0.502	0.383~0.339
53.72	26	0.342	0.0530	0.242	0.459	0.363~0.320
100.42	38	0.339	0.0431	0.224	0.441	0.353~0.325
0.12	40	0.558	0.1514	0.269	1.005	0.606~0.510
1.12	41	0.443	0.0854	0.299	0.708	0.471~0.415
781.5	39	0.341	0.0527	0.234	0.431	0.362~0.320

積は一定なので、実験結果は荷重で示す。

(3) 表面清浄法 表面のよごれの状態により $\bar{\mu}_s$ の大きさは著しく変る¹⁰⁾。エーテル・アルコール拭きあげ法を用いて、表面のよごれの状態を一定にするよう努めた。

(4) 実験条件 温度20℃、湿度65%の恒温恒湿室を用いた。

(5) 測定方法と誤差 測定法としては傾斜法 ($\omega = 0.5 \text{ deg/s}$) を用い、スライダのすべり出す角 θ から $\mu_s = \tan \theta$ として静摩擦係数を求めた。(図1) θ の読取り誤差は $\pm 5'$ であり、 $15'$ 以上のばらつきは実験誤差以外の原因から生ずると考えられる。

(6) 測定順序 荷重について実験順序をランダム化し、荷重以外の要因の影響を防いだ。

3. 実験結果および考察

(1) 実験結果の概要 表-1は、10シリーズ9種類の実験結果をスライダ重量ごとに、 $\bar{\mu}_s$, s , 最小値, 最大値, t 分布による $\bar{\mu}_s$ の95%信頼区間について示したものである。第一表より、 $\bar{\mu}_s$ はスライダ重量により影響されること、いちじるしいばらつきを伴うことが分る。

(2) アモントンの式との比較 アモントンの法則によれば、 $\bar{\mu}_s$ は W に無関係に一定となる。実験結果について、これを確かめてみる。 t 分布による $\bar{\mu}_s$ の95%信頼区間についてみると、 $W = 100.42 \text{ g}$ で信頼区間の幅はもっとも狭い。 $W = 100.42 \text{ g}$ での信頼区間の範囲から他の荷重の $\bar{\mu}_s$ をみると、 $W \leq 25.82 \text{ g}$ で有意差があり、 $53.72 \leq W \leq 781.5 \text{ g}$ では有意差が認められない。すなわち、アモントンの式は、荷重 25.82 g 以下すなわち 8 g/cm^2 以下の圧力範囲で成立しないことがあきらかである。固体間の静摩擦においても、低圧領域ではアモント

ンの式が成立しないことが実験により確かめられた。

(3) $\bar{\mu}_s$ と W との関係について アモントンの式は一定の圧力以上で成立することが確かめられた。一定の圧力以上で急に不連続的にアモントンの式が成立するかどうかは次の問題である。表1で、 W と $\bar{\mu}_s$ の関係を見ると、 W の増加につれ $\bar{\mu}_s$ は単調に減少して一定値に近づく。さらに、 μ_s の標準偏差、極値などについても W の変化に対応した一定の傾向がみられる。

アモントンの式からみれば、低圧領域の摩擦現象は例外であろう。しかし、ばらつきをも含めて W と $\bar{\mu}_s$ の関係をみれば、例外的にみえる低圧領域を含む全圧力領域において一定の法則性が貫いていると考えた方が合理的であろう。

(4) ばらつきの分布形について はじめに正規分布についてみると、結果の一部にはあてはまるが全体としては適用できない。とくに低圧領域で左右の非対称が著しく右にひずむ分布であると認められる。正規分布以外の分布関数として、二項分布、ポアソン分布、対数正規分布、ワイブル分布など多くのものがある。これらの中から数学的な取扱いが簡単で、筆者が息角の研究⁵⁾ に用いて好結果をえたレイリー (Rayleigh) 分布を μ_s のばらつきに応用してみる。レイリー分布の密度関数 $f(\mu_s)$, 分布関数 $F(\mu_s)$, 信頼度関数 $R(\mu_s)$ は、次式であらわされる。

$$f(\mu_s) = \frac{2}{\alpha} (\mu_s - \gamma) \exp\left\{-\frac{(\mu_s - \gamma)^2}{\alpha}\right\} \quad (5)$$

$$F(\mu_s) = 1 - \exp\left\{-\frac{(\mu_s - \gamma)^2}{\alpha}\right\} \quad (6)$$

$$R(\mu_s) = \exp\left\{-\frac{(\mu_s - \gamma)^2}{\alpha}\right\} \quad (7)$$

($\mu_s \geq \gamma$ のとき)

μ_s のばらつきがレイリー分布で近似できるならば、(7)式を変形した(8)式が成立し、 μ_s と $\sqrt{-\ln R(\mu_s)}$ は直

表-2 各荷重における α, γ

スライダ重量 W (g)	α	γ
0.12	0.1448	0.2061
2.92	0.0332	0.2255
6.02	0.0336	0.1891
11.82	0.0208	0.2347
25.82	0.0202	0.2348
53.72	0.0131	0.2402
100.42	0.0086	0.2565

$$\alpha = s^2 / (1 - \pi/4)$$

$$\gamma = \bar{\mu}_s - 1.913s$$

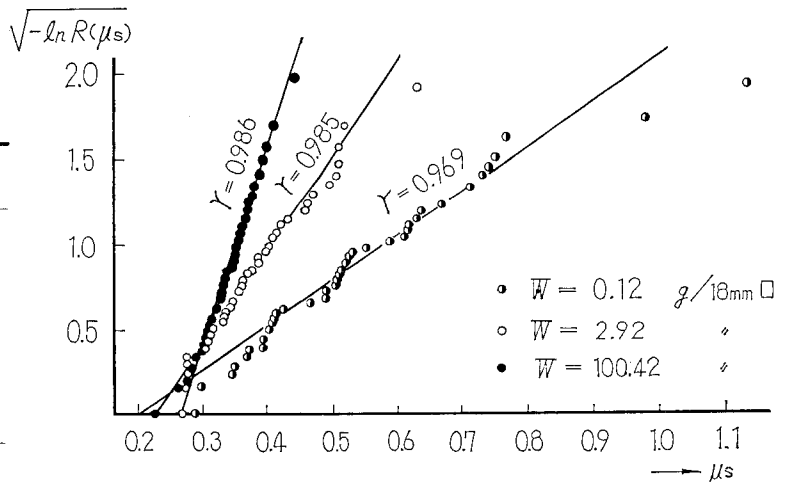


図-2 μ_s と $\sqrt{-\ln R(\mu_s)}$ との関係

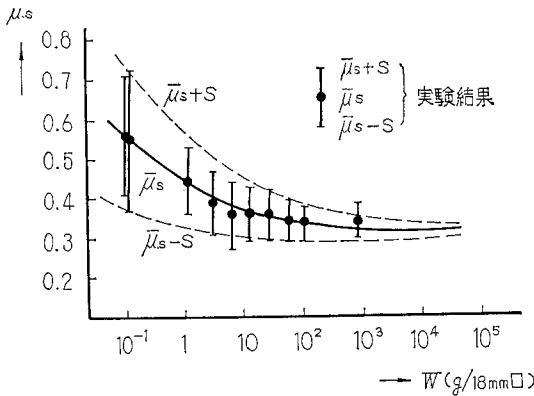


図-3 $\bar{\mu}_s$, $\bar{\mu}_s + s$ と W との関係

線関係をもつ。

$$\sqrt{-\ln R(\mu_s)} = (\mu_s - r) / \sqrt{\alpha} \quad (8)$$

図2は、実験結果のうち $W=0.12, 2.92, 100.42g$ のそれぞれについて μ_s と $\sqrt{-\ln R(\mu_s)}$ の関係を示したもので、ほぼ直線状になっている。最小二乗法で求めた回帰直線との相関係数を図中に示した。相関はきわめて高く、実験結果にレイリー分布をあてはめても不都合はない。

レイリー分布は、2ケのパラメータ α, r により定まる。パラメータ α, r は、①平均値と分散より求める方法、② $\sqrt{-\ln R(\mu_s)}$ と μ_s の回帰直線より求める方法のふたつから求められる。表2に、平均値と分散より求めた α と r を示した。

(5) α, r と W との関係について一定荷重のもとの μ_s のばらつきはレイリー分布にしたがい、二つのパラメータ α, r で示された。さらに、 α, r と W との関係が求められれば、この実験条件下での摩擦現象は、ばらつきを含めて完全に表現できる。

W と α の間には、ほぼ次の関係が成立つ。

$$-\log \alpha \doteq \log 15.6 + 0.40 \log W \quad (9)$$

すなわち、

$$1/\alpha \doteq 15.6 W^{2/5} \quad (10)$$

つぎに、 W と r についてみると、 r と $\log W$ との間に次式が成立する。

$$r \doteq 0.219 + 0.015 \log W \quad (11)$$

実験結果から求めた(10)式の α 、(11)式の r から、 μ_s と s を W であらわす。

$$\bar{\mu}_s \doteq 0.219 + 0.015 \log W + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{15.6}} W^{-1/5} \quad (12)$$

$$s \doteq \sqrt{(1-\pi/4)/15.6} W^{-1/5} \quad (13)$$

(12)式は、 $W \rightarrow \infty$ で $\bar{\mu}_s \rightarrow \infty$ 、 $W \rightarrow 0$ のとき $\bar{\mu}_s \rightarrow -\infty$ となるので、一定の範囲で成立する。(12)、(13)式から $\bar{\mu}_s$ 、 $\bar{\mu}_s \pm s$ を求め、 $10^{-1} \leq W \leq 10^5 g$ の範囲で、実験結果とあわせて図3に示した。

(6) ビンチの式との比較 図3からはビンチの式が成立しそうである。しかし、 $\bar{\mu}_s$ は(12)式によって示されるので、(4)式のビンチの式とは一致しない。おそらく、ビンチの式はより狭い領域で成立する近似式と考えてよいであろう。

IV. むすび

粉粒体を土壌のモデルとするばあいに大きな問題となるのは、粒子間にはたらく摩擦の法則に不明な点があることである。固体間の摩擦に用いられるクーロンの法則と土質力学で用いられるクーロンの法則との関係を明らかにするために、ガラス平面間の静摩擦係数についての実験を行なった。

(1) 固体間摩擦においても低圧領域(本実験では $8g/cm^2$ 以下)ではアモントンの式は成立しない。

(2) 低圧領域では、静摩擦係数はいちじるしいばらつきを示す。一定荷重下でのそれはレイリー分布にしたがう。

(3) 低圧領域を含めた広い領域で、これまではビンチの式が成立すると考えられていた。しかし、固体間摩擦ではビンチの式は必ずしも成立するとはいえない。

(4) 実験は、比較的きれいな表面についておこなわれ、付着力の影響は考えなくてよい。息角は粉体表面で、粉体の自重によって形成されるので、低圧領域における摩擦現象のひとつと考えてよい。アモントンの式は付着力のないばあいでも低圧領域では成立しない。したがって、チェボタリオフ⁹⁾ やテルツァギ・ベック¹¹⁾ のように乾いた砂の息角現象にアモントンの式をあてはめて考えることは誤りといえる。

(5) 粉体の挙動には、確率的な現象が多くみられる。粉体の挙動の多くには摩擦が介在する。表1に示したように、低圧領域での摩擦現象はとくに大きなばらつきを伴う。粉体の挙動は、このような領域で生じているため、確率的な現象となるのであろう。

(6) 以上の議論は、付着力のない状態で簡単なモデル実験によってえられた結果である。しかし、低圧領域での摩擦は意外に複雑な挙動を示している。粘着力のあるばあいで摩擦現象が明確にされない限り、粉体を土壌のモデルとすることの有効性は少ないであろう。

引用文献

- 1) ソコロフスキー：“土のような粒状体の力学”，オーム社，(1964)
- 2) 最上武雄：粉体工学，Vol.1, No.5, 293, (1964)
- 3) Y.R.A.：化学工学，Vol.24, No.8, 600, (1960)
- 4) Train, D.：J. of Pharmacy & Pharmacology, Vol. 10, 127T, (1958)

- 5) 林 尚孝 : 材料, Vol.21, No.213, 754, (1971)
- 6) 曾田範宗 : “摩擦の話”, 岩波新書, (1971)
- 7) Coulomb, C. A. : Memoires des Mathématique et de Physique de l' Academie Royale des Sciences, 104, (1785)
- 8) Amontons, G. : Historie de l' Académie Royale des Science avec les Memoires de Mathématique et de Physique, 206, (1699)
- 9) Tschebotarioff, G. P. : “Soil Mechanics, Foundations and Earth Structures”, McGraw-Hill, 125, (1951)
- 10) 木下是雄, 牧二郎 : 応用物理, Vol. 18, No. 8-9, 260, (1949)
- 11) Terzaghi, K. & Peck, R. B. : “Soil Mechanics in Engireering Practice”, 81, 92, John Wiley & Sons., (1948)