エントロピー最大法を用いた新しい浸潤方程式

Novel infiltration equation with a parameter determined by maximum entropy principle

筒井亮[1]・清澤秀樹[2]

[1]三重大学生物資源学部・[2]三重大学生物資源学研究科

要旨

浸潤方程式についてはこれまで多くの経験式や理論式が提案されてきた．しかし，それらには実測データをもとに同定する必要があるパラメータが含まれ，しかも，それらは土壌の物理性と直接結びつかないものがほとんどである． 本研究ではエントロピー最大法(MEP 法)を用いて，土壌状態から容易に得られるパラメータのみを用いた浸潤式の開発・検討を行った．

キーワード：浸潤方程式，エントロピー最大法，改良ホートン式

Key words : infiltration equation, maximum entropy principle, improved Horton equation

1. はじめに

従来の浸潤解析は, 非線形方程式の数値シュミレーションか経験式を用いるかのいずれかである. 浸潤の経験式で長年利用されているもの 1 つに Horton 式がある．しかし，この式にはパラメータが含まれており事前に実測値をもとにパラメータ同定をする必要がある上, 同定をしても系統的な差異が出てしまうことも多々ある．そこで Horton 式を検討し直し，同定が容易に行うことができる新しい浸潤方程式を導出した．なお，以下における数値計算例は HYDRUS-1D を用い，”loamy sand”において上端から 25(mm/h)で定常的に水を与える設定で得られた数値データを用いた．

２．新しい浸潤方程式

Horton 式とその微分形は以下のように表される．

$$i(t) = i_c + (i_0 - i_c)\exp(-kt) \cdots (1)$$

$$\frac{di}{dt} = -k(i - i_c) \cdots (2)$$

ここで，iは浸潤速度，i_cは最終浸透能，i_0は初期浸透能，kは減衰係数である．数値解で(2)式の関係をグラフにすると Fig. 1 のような曲線となり, 最終浸透能に近い浸潤フラックスを正確に表現できていない．

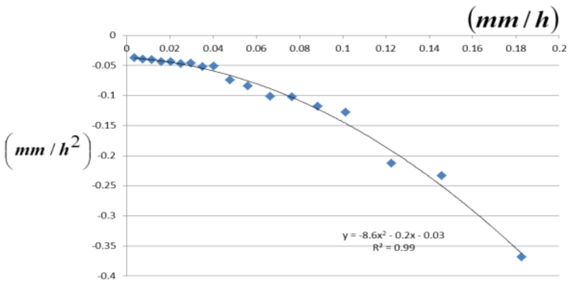

Fig. 1　Horton 式の微分形

縦軸$\left[\frac{\Delta i}{\Delta t}\right]$，横軸$[i - i_c]$

そこで，(2)式の k を i に比例するものとして，新たにλを比例定数とすると，(3)式となる．この時、数値解は Fig. 2 のような直線になり, より正確に現象を表す. (3)式を解くと(4)式を得る．

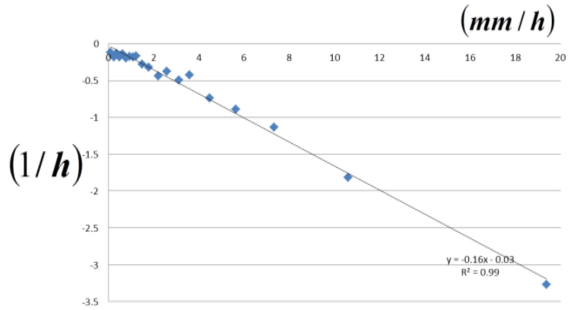

Fig. 2　新モデルの微分形

縦軸$\left[\frac{1}{i}\frac{\Delta i}{\Delta t}\right]$，横軸$[i - i_c]$

$$\frac{di}{dt} = -\lambda i(i - i_c)\,,\quad (I.C.): i(0) = i_0 \cdots (3)$$

$$i(t) = \frac{i_c}{1 - \alpha\exp(-\lambda i_c t)}\,,\quad \alpha = 1 - \frac{i_c}{i_0}\quad \cdots (4)$$

３．エントロピー最大法（MEP 法）

Singh(2010)は MEP 法を浸潤方程式に適用し，パラメータを既知の物理量と関連づけることに成功した．本研究ではそれを応用する．MEP 法では以下で定義されるシャノンエントロピーを用いる．

$$H\big(p(i)\big) = -\int p(i)\ln p(i)di \cdots (5)$$

ここで，$p(i)$は浸潤速度を確率変数とする確率密度関数である．

MEP 法によると，浸潤速度の分布は(5)式が最大化されるように進行すると仮定する．すなわち、(6)の条件下で(5)式が最大となるような$p(i)$を求める．

$$\int_1^{\frac{i}{i_c}} p(i)di = 1 \cdots (6)$$

ここで，ラグランジュの未定乗数法を用いると，$p(i)$は以下のようになる．

$$p(i) = \frac{i_c}{i - i_c} \cdots (7)$$

さらに，土の最大保水量を S とし，Singh(2010)が用いた以下の仮定を適用する．

$$p(i) = -\frac{1}{S}\frac{dI}{di} \cdots (8)$$

(7)式と(8)式を組み合わせることで以下を得る．

$$i(t) = \frac{i_c}{1 - \alpha\exp(-\frac{1}{S}t)} \cdots (9)$$

(9 式)と比較すると，(4)式のλは最大保水量 S と次のように対応していることがわかる．

$$\frac{1}{S} = \lambda i_c \cdots (10)$$

４．計算結果

以下に新モデルと Horton 式を数値計算の結果と比較した図を示す．Horton 式のパラメータは計算領域初期[$t \le 0.5(h)$]において誤差が最も小さくなるように決めたもの(Horton1)と計算領域全体で誤差が最小になるもの(Horton2)を用いた．また，新モデルのパラメータ S は 0.25 として計算している．これを見ると Horton 式（緑）よりも，新モデル（青）の方がより正確に浸潤現象を表現していることが見てとれる．

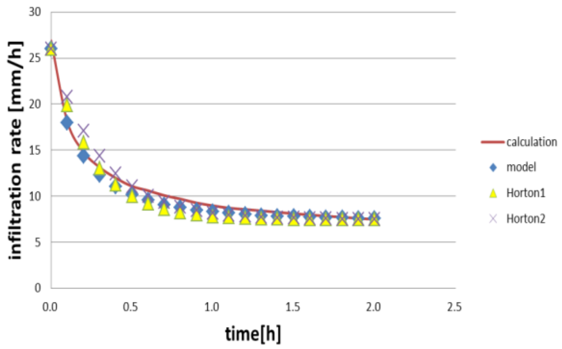

Fig. 3　新モデル(9 式)・Horton 式と数値計算との比較

５．考察

本研究では，従来の Horton 式の問題を指摘し，新しい浸潤式を導出した．さらに，MEP 法を用いることで，モデル中のパラメータと容易に求めることのできる物理量を関連づけることに成功した．今後は，さらにこのモデルの適応性について，様々なデータと比較・検討する必要がある．

参考文献

1)Singh, V. P. (2010), Entropy theory for derivation of infiltration equations, Water Resour. Res., 46, W03527, doi:10.1029/2009WR008193

2) Assouline, S.(2013), Infiltration into soils : Conceptual approaches and solutions, Water Resour. Res., 49, doi:10.1002/wrcr.20155.

3) Daniel Hillel(1998), “Environmental soil physics” Academic Press.